5-4-2013

Τελευταία άσκηση προηγούμενης φοράς

Λάθος

K σύνολο από δομές

1) $\mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\,K \supseteq K$.

2) $\mathrm{Mod}\,\mathrm{Th}\,K = K$ ανν και μόνον αν

$\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}\,K$ τότε $\mathfrak{A} \in K$.

2b Αν $a \in Th\mathcal{K} \Rightarrow a \in \mathcal{K}$

Τότε $Mod\, Th\mathcal{K} = \mathcal{K}$

Αρκεί να αποδείξω ότι

$$Mod\, Th\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$$

Εξαιρέτως Ενδιαφέρουσα Άσκηση.

Έστω T, Σ σύνολα αποφάνσεων που δεν έχουν κοινό μοντέλο.

Να αποδειχθεί ότι $\exists$ απόφανση σ

$$T \vdash \sigma \ \& \ \Sigma \vdash \neg\sigma.$$

Λύση. Από την υπόθεση έχω $T \cup \Sigma$ μη ικανοποιήσιμο. Από Θ. Αξιο & Πληρότητας $T \cup \Sigma$ ασυνεπές.

Άρα υπάρχουν $\tau_1,\dots,\tau_n \in T$

& $\sigma_1,\dots,\sigma_k \in \Sigma$ έτσι ώστε

$\{\tau_1,\dots,\tau_n,\sigma_1,\dots,\sigma_k\}$ ασυνεπές.

Άρα $\{\tau_1,\dots,\tau_n,\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_k\}$ ασυνεπές.

Άρα $\{\tau_1,\dots,\tau_n\} \vdash \neg(\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_k)$

Άρα $T \vdash \neg(\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_k)$ Θέτω σ να είναι $\neg(\sigma_1\wedge\dots\wedge\sigma_k)$

Οπότε $T \vdash \sigma$

Όμως $\tau\sigma \equiv \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k$

Τότε όμως $\Sigma \vdash \tau\sigma$. ΟΕΔ.

Παραλλαγή.

Αν T, Σ, ϕ, ψ δεν έχουν κοινό μοντέλο τότε $\exists\, \sigma$ έτσι ώστε

$$T \vdash \phi \to \sigma$$

$$\Sigma \vdash \psi \to \neg\sigma.$$

Προδεσμευτική Κανονική Μορφή.
(Προτακτική)

Prenex Normal ~~Canonical~~ Form

nexus,

plexus

ϕ έχει τη μορφή $Qx_1 \ldots Qx_n \psi$
όπου Q είναι $\forall$ ή $\exists$ & το ψ δεν
έχει ποσοδείκτες.
Κάθε τύπος είναι λογ. ισοδύναμος με τύπο

σε προσθετική κανονική μορφή

Απόδειξη (σκιαγράφηση)

1) Έστω ότι φ είναι $\neg X$

"Σπρώχνω" την άρνηση πέρα από τα Q.

2) $X_1 \to X_2$ Αρκεί να καλύψω τις εξής περιπτώσεις:

$\alpha \to \exists x \beta$ με το x να μην εμφανίζεται ελεύθερο στην α.

$\alpha \to \forall x \beta$ . . .

$\exists x \alpha \to \beta$

$\forall x \alpha \to \beta$

Παρατηρούμε ότι

$$\underbrace{\alpha \to \exists x \beta} \equiv \exists x (\alpha \to \beta)$$

$$\alpha \to \forall x \beta \equiv \forall x (\alpha \to \beta)$$

Έστω ότι $\alpha \to \exists x \beta$ θα αποδείξω ότι $\exists x (\alpha \to \beta)$. Έστω ότι $\neg \exists x (\alpha \to \beta)$. Άρα για κάθε x, $\alpha \wedge \neg \beta(x)$ Από την υπόθεση έχω $\exists x \beta$ άτοπο.

$$\forall x \alpha \to \beta \not\equiv \forall x (\alpha \to \beta)$$

$$\forall x \alpha \to \beta \equiv \exists x (\alpha \to \beta)$$

$$\exists x \alpha \to \beta \equiv \forall x (\alpha \to \beta)$$

Μια Συμβατική Ανάγνωση

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

$$\lim_{x \to a} F(x) = b.$$

Πρωτοτάξια γλώσσα για τους πραγματικούς

$\mathbb{R}$

1) Για κάθε σχέση R στο $\mathbb{R}$ έχω κατηγορηματικό σύμβολο P_R.

2) συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ " " σύμβολο συνάρτησης F_f.

3) $\forall r \in \mathbb{R}$ έχω σύμβολο σταθεράς c_r.

Πλήθος συμβόλων $2^{2^{\aleph_0}}$

Σύνολο ~~αποφάσεων~~ τύπων

$\mathcal{R}$ η δομή για την οποία

$$|\mathcal{R}| = \mathbb{R}$$

$$P_R^{\mathcal{R}} = R$$

$$f_F^{\mathcal{R}} = F$$

$$c_r^{\mathcal{R}} = r.$$

$Th\mathcal{R}$

$$\{ c_r \, P_c \, v_1 \mid r \in \mathbb{R} \}$$

Είναι ικανοποιήσιμο;

ΝΑΙ από Θ. Συμπ.

$\mathfrak{a}$ b δομή & στοιχείο

του $|\mathfrak{a}|$ έτσι ώστε η $\mathfrak{a} \models \sigma$

την αποτίμηση $s(v_1)=b$ να ικανοποιεί

τους τύπους στο προηγούμενο σύνολο.

Θα αποδείξω ότι $\mathfrak{R}$ εμβαπτίζεται

στην $\mathfrak{a}$. Θα ορίσω μορφισμό 1-1 τον h

$$h(n) = c_n^{\mathfrak{a}}$$

Απόδειξη ότι h είναι μορφισμός 1-1.

A) 1-1. $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ Πρέπει να αποδείξω

$c^a_{\Gamma_1} \neq c^a_{\Gamma_2}$. Δηλ. $\mathfrak{A} \models c_{\Gamma_1} \neq c_{\Gamma_2}$

Αλλά $c_{\Gamma_1} \neq c_{\Gamma_2} \in Th\mathcal{R}$ Άρα πράγματι

$\mathfrak{A} \models c_{\Gamma_1} \neq c_{\Gamma_2}$ $\left(\mathfrak{A} \models Th\mathcal{R}\right)$

β. Διατηρούνται οι σχέσεις.

$$R(r,s) \text{ ανν } R^{\alpha}(h(r), h(s))$$

$$R(r,s) \iff \mathcal{R} \models P_R(c_r, c_s)$$

Άρα $\mathcal{Q} \models P_R(c_r, c_s)$

άρα $R^{\alpha}(c_r^{\alpha}, c_s^{\alpha})$ ΟΕΔ.

Συμβολισμός

R σχέση στην $\mathcal{R}$

$^*R$ σχέση στην $^*\mathcal{R}$

f συν, $^*f$ συνάρτηση

$^*r = r$

$${}^{*}|x|$$

$$x \in {}^{*}\mathbb{R}$$

$$x \;{}^{*}\!\!< y$$

Θα ξεχνώ τα αστέρια.

$\mathbb{R}$ $\mathcal{R}$

${}^*\mathbb{R}$ ${}^*\mathcal{R}$

$$F = \{ x \in {}^*\mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \ |x| < y \}$$

$$I = \{ x \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R} (y > 0) \ |x| < y \}$$

I είναι απειροστές

Λέμε για $x, y \in {}^*\mathbb{R}$

ότι $\underset{\text{απείρως κοντά}}{x \simeq y}$ αν $x - y \in \mathbb{I}$.

Αν $x \in {}^*\mathbb{R}$ & $x \in \mathcal{F}$

$$x = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{st(x)} + \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{I}}}{dx}$$

Ορισμός $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} F(x) = b$$

Αν $y \simeq x$ τότε ${}^*F(y) \simeq b$