Ουρές Αναμονής

① Ασκ. 5.12 / φυλ. 1

- $M/M/c/c$
- Ρυθμός αφίξεων: λ
- Exp(μ) χρ. εξυπ.
- Πιθ. άμεσης αποχώρησης: $\frac{n}{c}$, όταν ένας αφικν. πελ. βρει n άτομα

1. Στάσιμη κατανομή (p_n); Τι κατανομή είναι;
2. Ποσοστό χαμένων πελ.;
3. $E[S]$: Μέσος χρ. παραμονής αφιχθέντων
   $E[S']$: —//— εισελθόντων
4. $E[Z]$: Μέσος κύκλος απασχ. συστήματος
   (Διάστημα από άφιξη που βρίσκει το συστ. κενό ως την επομ. —//—).

1. $\{Q(t)\}$ Γ-Θ:

M/M/c/c

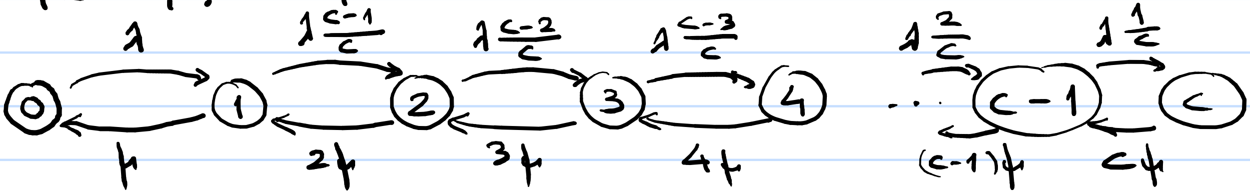
Κατάστ.	Επόμ. κατάστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\lambda)$
$1 \le n \le c-1$	$n+1$	$Exp\left(\lambda\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)$
	$n-1$	$Exp(n\mu)$ $\left(= \min(\underbrace{Exp(\mu), \dots, Exp(\mu)}_{n})\right)$
c	$c-1$	$Exp(c\mu)$

Όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες: A

Ρυθμός αφίξ: λ

Π.θ. μια άφιξη να μπει: $1-\frac{n}{c}$ } Διαδικ. εισόδων ← Θεωρ. διασπ. Poisson

Poisson με ρυθμό $\lambda\left(1-\frac{n}{c}\right)$



$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{c}{c}"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{c-1}{c}"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{c-2}{c}"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{c-3}{c}"] & 4 \arrow[l, bend left, "4\mu"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{2}{c}"] & c-1 \arrow[l, bend left, "(c-1)\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda\frac{1}{c}"] & c \arrow[l, bend left, "c\mu"]
\end{tikzcd}$$

$$\frac{c!}{(c-n)!}$$

Χωρητικ. πεπερ $\Longrightarrow$ Ευστάθεια

$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{\lambda\frac{c}{c}\,\lambda\frac{c-1}{c}\,\lambda\frac{c-2}{c}\cdots\lambda\frac{c-(n-1)}{c}}{\mu\quad 2\mu\quad 3\mu\quad\cdots\quad n\mu} = \frac{\lambda^n}{c^n\mu^n}\cdot\frac{c(c-1)\cdots(c-n+1)}{n!}$$

$$= \frac{\lambda^n}{c^n\mu^n}\cdot\frac{c!}{n!(c-n)!} = \binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{c}\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n = \sum_{n=0}^{c}\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n \underset{\uparrow}{=} \left(1+\frac{\lambda}{c\mu}\right)^c = \frac{(c\mu+\lambda)^c}{(c\mu)^c}.$$

Διων. ανάπτυγμα

$$P_n = \begin{cases} B & n=0 \\ B\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n, & 1\le n\le c \end{cases} = B\binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n = \binom{c}{n}\left(\frac{\lambda}{c\mu+\lambda}\right)^n\cdot\left(\frac{c\mu}{c\mu+\lambda}\right)^{c-n}$$

$$Q \sim \mathrm{Bin}\left(c, \frac{\lambda}{c\mu+\lambda}\right).$$

2. Ποσοστό χαμένων πελατών $= \dfrac{\text{Ρυθμός άμεσων αναχωρ.}}{\text{Ρυθμός αφίξεων}}$

Ρυθμός άμεσων αναχωρ. $= \displaystyle\sum_{n=0}^{c} \underbrace{P_n}_{\text{ποσοστό χρόνου που στο σύστημα υπάρχουν } n \text{ πελ.}} \cdot \underbrace{\lambda \frac{n}{c}}_{\text{ρυθμός άμεσων αποχωρ. όταν στο συστ. υπάρχουν } n \text{ πελάτες}} = \frac{\lambda}{c} \sum_{n=0}^{c} n P_n = \frac{\lambda}{c} E[Q] = \frac{\lambda}{\cancel{c}} \cdot \cancel{c} \frac{\lambda}{c\mu + \lambda}$

Άρα Ποσοστό χαμ. πελατών $= \dfrac{\frac{\lambda^2}{c\mu+\lambda}}{\lambda} = \dfrac{\lambda}{c\mu+\lambda}$

3. $E[\underbrace{S}_{\text{χρόνος παραμ. αφιχθ.}}]$

N. Little: $E[Q] = \underbrace{\lambda_{αφίξεις}}_{\lambda} E[\underbrace{S_{αφίξεις}}_{E[S]}]$

$\Downarrow$

$$E[S] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{c \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{c\mu+\lambda}}{\cancel{\lambda}} = \frac{c}{c\mu+\lambda}.$$

$E[S']$ χρόνος παραμ. εισερχ.

N. Little: $E[Q] = \lambda_{\text{εισερχ.}} \cdot E[S_{\text{εισερχ}}]$

$$E[S_{\text{εισερχ}}] = E[S']$$

$$\Downarrow$$

$$E[S'] = \frac{E[Q]}{\lambda'} = \frac{c \cdot \frac{\lambda}{c\mu+\lambda}}{\lambda'}$$

$$\lambda' = \text{Ρυθμός εισερχομ.} = \sum_{n=0}^{c} p_n \cdot \lambda\left(1-\frac{n}{c}\right) = \lambda \underbrace{\sum_{n=0}^{c} p_n}_{=1} - \frac{\lambda}{c} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n p_n}_{E[Q]} = \cdots$$

$$\text{ή} \quad \text{Ρυθμός αφίξεων} - \text{Ρυθμός άμεσων αναχωρ} = \lambda - \frac{\lambda^2}{c\mu+\lambda} = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{c\mu+\lambda}\right) = \frac{\lambda c\mu}{c\mu+\lambda}$$

Άρα τελικά:

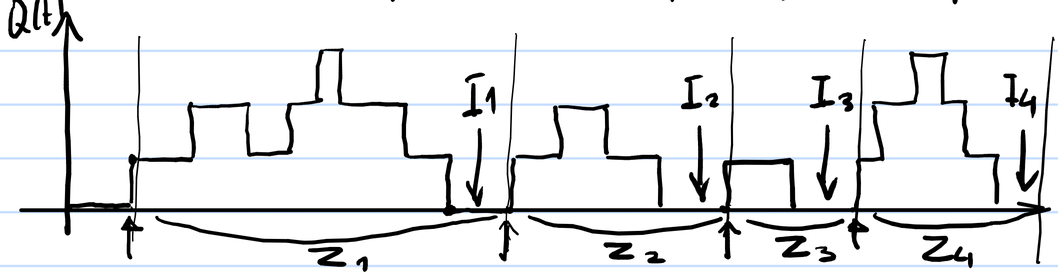
$$E[S'] = \frac{\cancel{c} \cdot \cancel{\frac{\lambda}{c\mu+\lambda}}}{\frac{\cancel{\lambda c}\mu}{\cancel{c\mu+\lambda}}} = \frac{1}{\mu}$$

(λογικό αφού χρ. παραμονής εισερχόμενου = χρ. εξυπ. εισερχ.)

Σύνδεση $E[S], E[S']$:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{χρόνος παραμ.} \\ \text{αφιχθ. πελ.}}}{E[S]} = \underbrace{Pr[\text{μπήκε}]}_{= 1-\frac{\lambda}{c\mu+\lambda} = \frac{c\mu}{c\mu+\lambda}} \underbrace{E[S \mid \text{μπήκε}]}_{E[S'] = \frac{1}{\mu}} + \underbrace{Pr[\text{έφυγε}]}_{\substack{= \text{ποσοστό} \\ \text{χαμένων} \\ \text{πελατών}} = \frac{\lambda}{c\mu+\lambda}} \underbrace{E[S \mid \text{έφυγε}]}_{=0}$$

Άρα $$E[S] = \frac{c\mu}{c\mu+\lambda} \cdot E[S'] = \frac{c\cancel{\mu}}{c\mu+\lambda} \cdot \frac{1}{\cancel{\mu}} = \frac{c}{c\mu+\lambda}$$

4. 

ΣΑΘΚ:

$$\text{Μακρ. ποσοστό χρόνου που το σύστημα κενό} = \frac{E\left[\underbrace{\text{χρόνος σε έναν κύκλο λειτ. με κενό σύστ.}}_{=\ \text{Περίοδος αργίας}}\right]}{E[\text{κύκλου λειτουργ.}]}$$

Άρα $\quad P_0 = \dfrac{E[I]}{E[Z]} \Longrightarrow \left(\dfrac{c\mu}{c\mu+\lambda}\right)^c = \dfrac{1/\lambda}{E[Z]}$

$$\Longrightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{c\mu+\lambda}{c\mu}\right)^c.$$

② Ασκ. 5.4 / Φυλ. 2 (Θέμα 4 - Ιούνιος 2019)

- Συστ. εξυπηρ.
- 2 είδη πελατών: A, B
- Poisson αφίξεις με ρυθμό ν για τους A (ανυπόμονοι)

  — " — λ — " — B
- A → εισερχ. μόνο αν το συστ. είναι κενό

  B → εισερχ. πάντα
- 1 υπηρ.
- $Exp(\mu)$ χρ. εξυπ.
- ∞ χωρητικ.
- FCFS

1. Παράσταση ως απλή Μαρκ. ουρά / Ευστάθεια / (p_n) ;
2. Μέσος χρ. παραμ. πελάτη τύπου B
3. Μέση διαρκ. συνεχούς λειτ.

Καταστ.	επομ. καταστ.	Χρόνος
0	1	$Exp(\nu+\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$
	$n-1$	$Exp(\mu)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\nu+\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{(\nu+\lambda)\lambda^{n-1}}{\mu^n}$$

$$B^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\nu+\lambda)\lambda^{n-1}}{\mu^n} = 1+\frac{\nu+\lambda}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}$$

$$= \begin{cases} 1+\frac{\nu+\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{1-\lambda/\mu}, & \text{αν } \lambda/\mu<1 \\ \infty, & \text{αν } \lambda/\mu \geq 1 \end{cases}$$

Συνθ. ευστ.

Άρα $$B^{-1} = 1 + \frac{\nu+\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\mu+\nu}{\mu-\lambda}$$

$$P_n = \begin{cases} B & \text{αν} \quad n=0 \\ B\dfrac{(\nu+\lambda)\lambda^{n-1}}{\mu^n}, & \text{αν} \quad n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\mu-\lambda}{\mu+\nu}, & \text{αν} \quad n=0 \\ \dfrac{(\mu-\lambda)(\nu+\lambda)\lambda^{n-1}}{(\mu+\nu)\mu^n}, & \text{αν} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

S : Χρόνος παραμ. π.σ.

Θ. Little: $$E[Q] = \lambda_{αφιξ.} \, E[S]$$

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{(\mu-\lambda)(\nu+\lambda)}{(\mu+\nu)\mu} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}} = \frac{(\mu-\lambda)(\nu+\lambda)}{(\mu+\nu)\cdot\mu} \cdot \frac{1}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}$$

Αλλά $$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \; |t|<1 \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{(\nu+\lambda)\mu}{(\mu+\nu)\,(\mu-\lambda)}.$$

$$\lambda_{αφιξ} = \lambda+\nu \Rightarrow E[S] = \frac{\mu}{(\mu+\nu)(\mu-\lambda)}$$

Εύρεση του $E[S_B]$: Μέσος χρ. παραμ. πελ. B:

$$E[S_B] = \frac{E[Q \mid \text{σε στιγμή άφιξης πελ. B}] + 1}{\mu}$$

$$\underset{\text{PASTA}}{=} \frac{E[Q]+1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{(\nu+\lambda)\mu}{(\mu+\nu)\ (\mu-\lambda)} + 1\right).$$

Εναλλακτικός τρόπος:

$$E[S] = \text{πιθ. πελ. A} \cdot E[S_A] + \text{πιθ. πελ. B} \cdot E[S_B]$$

$$\frac{\mu}{(\mu+\nu)(\mu-\lambda)} = \frac{\nu}{\nu+\lambda} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\nu+\lambda} E[S_B] \implies E[S_B] = \dots$$

Για τη μέση διάρκεια χρ. συνεχ. λειτ. Y: $\underset{\text{γνωστό}}{p_0} = \dfrac{\overset{\text{γνωστό} = \frac{1}{\lambda+\nu}}{E[I]}}{E[I]+E[Y]} \implies E[Y] = \dots$