Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη και Εφαρμογές

1 ΣΑΘΚ: Βασική ιδέα

Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους $= \dfrac{E[\text{Κόστος 1 κύκλο}]}{E[\text{Διάρκεια 1 κύκλου}]}$

↑ Βασική υπόθεση

$(X_n, C_n), n \geq 1$: ανεξ + ισον.

X_n: Διαρκεια n-οστου κυκλου

C_n: Κόστος στη διάρκεια του n-οστου κυκλου

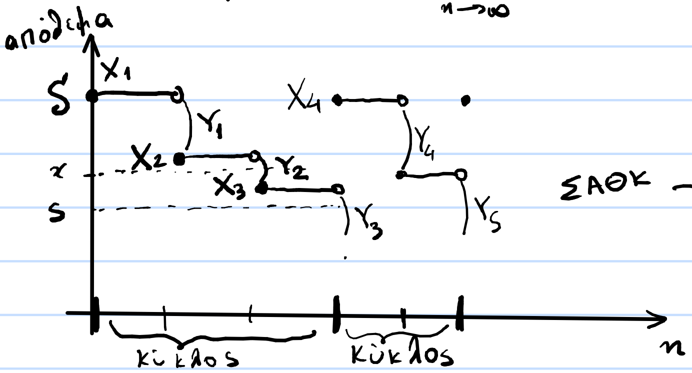
② Ασκ. 4.4 φυλ.1

- Αποθήκη που εξετάζεται στην αρχή κάθε περιόδου
- X_n = απόθεμα στην αρχή της περιόδου n
- $X_1 = S > 0$ γνωστό
- Y_n = ζήτηση στην περίοδο n, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ανεξ. + ισον $\sim F_Y(x)$
- Αν απόθεμα πέσει κάτω από s $(<S)$ τότε άμεση αναπλήρ. σε επιπ S.

γνωστό

S-s πολιτική ανανέωσης αποθέματος.

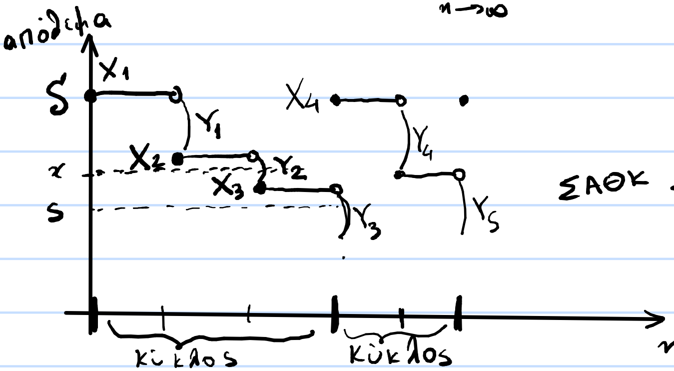
Να βρεθεί η $\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \geq x]$ ← Οριακή πιθαν το απόθεμα $\geq x$.



$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \geq x]$ = Μακρ. ρυθμός κόστους αν έχω κόστος "1" όταν αποθ. $\geq x$

ΣΑΘΚ → $= \dfrac{E[\text{κόστος σε 1 κύκλο}]}{E[\text{διάρκεια 1 κύκλου}]}$

Κύκλος = Από ύψος αποθ. S έως αναπαραγγελία



$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \geq x] = \text{Μακρ. ρυθμός κόστους αν έχω κόστος "1" όταν αποθ.} \geq x$$

ΣΑΘΚ →

$$= \frac{E[\text{κόστος σε 1 κύκλο}]}{E[\text{διάρκεια 1 κύκλου}]}$$

$$= \frac{E[\#\text{ περιόδων ώστε το απόθεμα να "πέσει" από } x]}{E[\#\text{ περιόδων ώστε το απόθεμα να "πέσει" από } s]}$$

$$= \frac{E[\inf\{n : S - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_n < x\}]}{E[\inf\{n : S - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_n < s\}]}$$

Όμως:

$$\inf\{n : S - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_n < s\}$$
$$= \inf\{n : Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n > S - s\}$$
$$= 1 + \sup\{n : Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \leq S - s\}$$
$= 1 + \#$ γεγονότων σε αναν. διεδικ. με ενδιαμ. χρόνους $Y_1, Y_2, \dots$ μέχρι τη στιγμή $S - s$.

$$= \frac{E[1 + \#\text{ γεγ. σε αναν. διαδ. \dots μέχρι την } S-x]}{E[1 + \#\text{ γεγ. σε αναν. διαδ. \dots μέχρι την } S-s]}$$

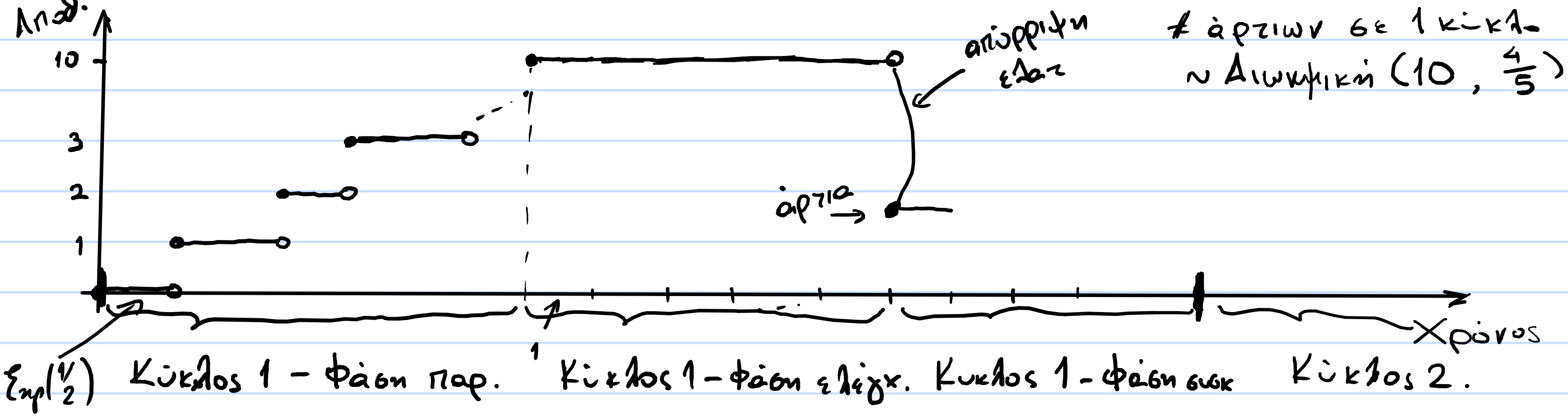
$$= \frac{1 + m_Y(S-x)}{1 + m_Y(S-s)}$$

όπου $m_Y(t)$ αναν. συν. με ενδιαμ. χρ. $\{Y_i\}$.

3 Ασκ. 4.3 / Φυλ. 2 (Θέμα 4 / Σεπτ. 2020)

- Επεξεργ. προϊόντων σε κύκλους λειτ.
- 3 φάσεις ανά κύκλο: παραγωγή, έλεγχος, συσκευασία
- Παραγωγή: Μέχρι να παραχθούν 10 προϊόντα
  Χρόνος παραγ. 1 προϊόντος $\sim Exp(1/2)$
- Έλεγχος: Έλεγχος 10 προϊόντων
  Χρόνος ελέγχου 1 προϊόντος = 1 χρον. μονάδα
  Προϊόν $\longrightarrow$ Άρτιο με πιθ. 4/5
  $\longrightarrow$ Ελαττ. με πιθ. 1/5
- Συσκευασία: Συσκευασία άρτιων προϊόντων
  Χρόνος συσκ 1 άρτιου προϊόντος = 1 χρον. μονάδα
- Κέρδος / άρτιο : 20€   Ζημιά / ελαττ : 2€
- Κόστος λειτουργίας μηχ / χρον. μονάδα : 2€ για παραγ / έλεγχο
  1€ για συσκευασία

Μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους = ;



Μακροπροθ. ρυθμός κέρδους $= \dfrac{E[\text{κέρδος σε 1 κύκλο}]}{E[\text{διάρκεια 1 κύκλου}]} = \dfrac{88}{38}$, διότι:

$E[\text{διάρκεια κύκλου}] = E[\text{διαρκ φάσης παρ}] + E[\text{διαρκ. φάσης ελέγχου}] + E[\text{διαρκ. συντ}]$

$= 10 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + \underbrace{10 \cdot \tfrac{4}{5}}_{\text{Μέσος άρτιων}} \cdot 1 = \underline{38}$ χρον. μον.

$E[\text{κέρδος 1 κύκλου}] = E[\text{κέρδος άρτιων}] - E[\text{ζημιά ελατ}] - E[\text{κόστος λειτ}]$

$= 10 \cdot \tfrac{4}{5} \cdot 20 - 10 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 2 - 10 \cdot 1 \cdot 2 - 10 \cdot \tfrac{4}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \underline{88}$

④ Ασκ. 4.4 / Φύλ. 2 (Θέμα 4 / Ιούνιος 2020)

- Επιθεωρήσεις μηχανής τις στιγμές αναν. διαδ. $\{M(t)\}$ με ενδιαφ. χρ. Erlang$(2,\mu)$.
- Μεταξύ επιθεωρ. παραγωγή προϊόντων σύμφωνα με σ.δ. Poisson ρυθμού λ.
- k €: κόστος/επιθεωρ. , r €: κέρδος/προϊόν , c €: κόστος λειτ/χρον. μον.

Μακροπρόθ. ρυθμός κέρδους=;

Λύση:

X_n: χρόνος μεταξύ $(n-1)$-οστής και n-οστής επιθεωρ.

$C(t)$: κέρδος ως τη στιγμή t.

C_n: κέρδος μεταξύ $(n-1)$-οστής και n-οστής επιθεωρ

$C_n = r \times$ #προϊόντων που παρηχθ. στον n-οστό κύκλο $-k-c\cdot X_n$

$= rN(X_n)-k-cX_n$, όπου $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ

$(X_n, C_n) = (X_n, rN(X_n)-k-cX_n)$, $n\geq 1$ ανεξ. ισον.

ΣΑΘΚ $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{t} = \frac{E[C_1]}{E[X_1]} = \frac{E[rN(X_1)-k-cX_1]}{E[X_1]} = \frac{r\lambda\cdot\frac{2}{\mu}-k-c\,{}^2\!/\!_\mu}{{}^2\!/\!_\mu}.$$

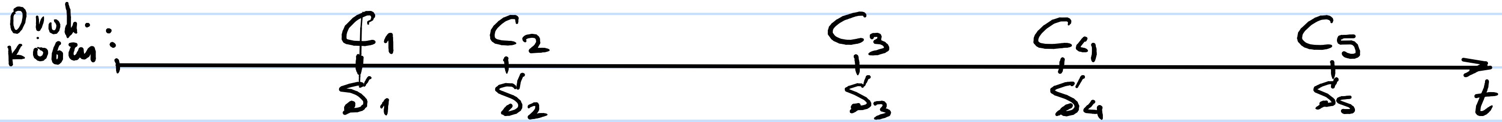
Μακρ. ρυθμός κέρδους

5 Ασκ. 4.7 / Φυλ. 1

- $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με χρόνους γεγον. $S'_1, S'_2, \dots$, ενδιάμ. $X_1, X_2, \dots$
- $\{C_n : n \geq 1\}$ ακολ. τ.μ. (C_n = κόστος στον n-οστό κύκλο που πληρώνεται στο τέλος του)
- $\{(X_n, C_n) : n \geq 1\}$ ανεξ. ισον. $\sim F_{X,C}(x,y)$
- $\alpha > 0$: αποπληθωριστής:
  Αν 1 χρηματική μονάδα πληρωθεί μετά από χρόνο t η παρούσα αξία της είναι $e^{-\alpha t}$.
- Έστω

$$TC = \text{Συνολικό αποπληθ. κόστος} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha S'_n}.$$

Παρούσα αξία: $C_1 e^{-\alpha S'_1}$ $C_2 e^{-\alpha S'_2}$ $C_3 e^{-\alpha S'_3}$ ...



$$E[TC] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha S_n}\right]$$

$$= E[C_1 e^{-\alpha S_1}] + E\left[\sum_{n=2}^{\infty} C_n e^{-\alpha S_n}\right] \qquad S_n = X_1 + (S_n - X_1)$$

$$= \underbrace{E[C_1 e^{-\alpha X_1}]}_{\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} y e^{-\alpha x}\, dF_{X,C}(x,y)} + E[e^{-\alpha X_1}]\, \underbrace{E\left[\sum_{n=2}^{\infty} C_n e^{-\alpha (S_n - X_1)}\right]}_{E[TC]}$$

$$\Rightarrow E[TC] = E[C_1 e^{-\alpha X_1}] + E[e^{-\alpha X_1}]\, E[TC]$$

$$\Rightarrow E[TC] = \frac{E[C_1 e^{-\alpha X_1}]}{1 - E[e^{-\alpha X_1}]}$$: "ΣΑΘΚ" μορφή για το συνολ. αποπλ. κόστος