Επιχειρησιακή Έρευνα : Στοχαστικά Μοντέλα 22/4/2021

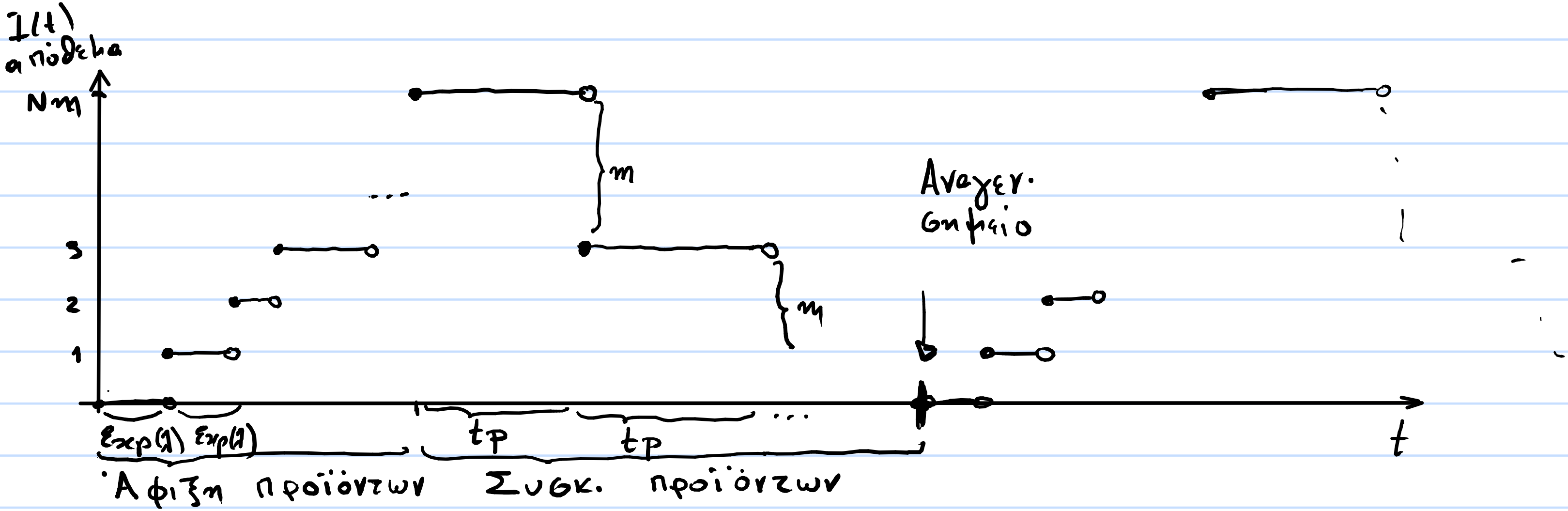
Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη

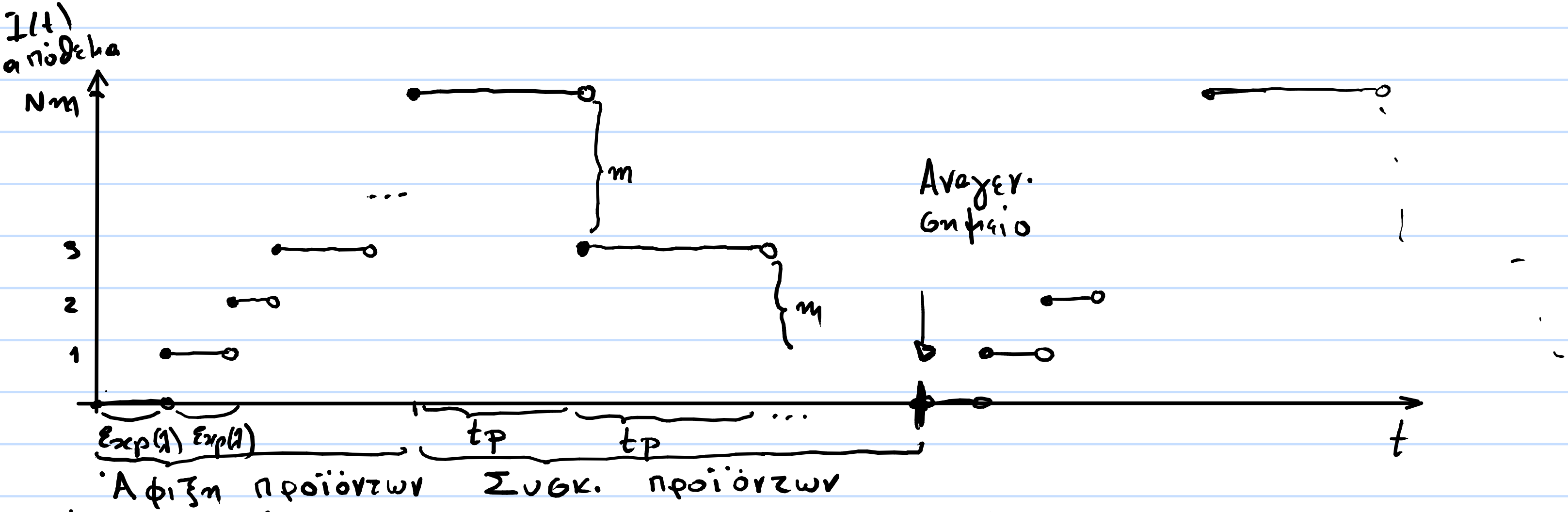
1) Βασικό Θέμα

- ΣΑΘΚ : Μακροπροθ. ρυθμός κόστους $= \dfrac{E[\text{Κόστος σε 1 κύκλο}]}{E[\text{Διάρκεια 1 κύκλου}]}$
- Έλεγχος υποθέσεων ΣΑΘΚ (ανεξ. + ισον.)
- Υπολογ. μέσης διάρκειας κύκλου
- Υπολογ. κόστους 1 κύκλου
- Εφαρμογή ΣΑΘΚ
- Βελτιστοποίηση κόστους (κλασικές μέθοδοι, Lagrange, Karush-Kuhn-Tucker)

② Ασκ. 4.1 / Φυλ. 2 (Θέμα 3 - Σεπτ. 2018)

- Άφιξη προϊόντων με Poisson ρυθμού λ μέχρι να συγκεντρ. Nm προϊόντα
- Κύκλος συσκευασίας: Παύση αφίξεων, Συσκ. σε N κουτιά m προϊόντων
  Συσκ. m προϊόντων σε 1 κουτί $\rightarrow t_p$ χρον. μον. Μετά αναχώρηση κουτιού
- Κόστος αποθ: c_p/προϊόν & χρον. μονάδα
- Κόστος συσκ k_b/κουτί



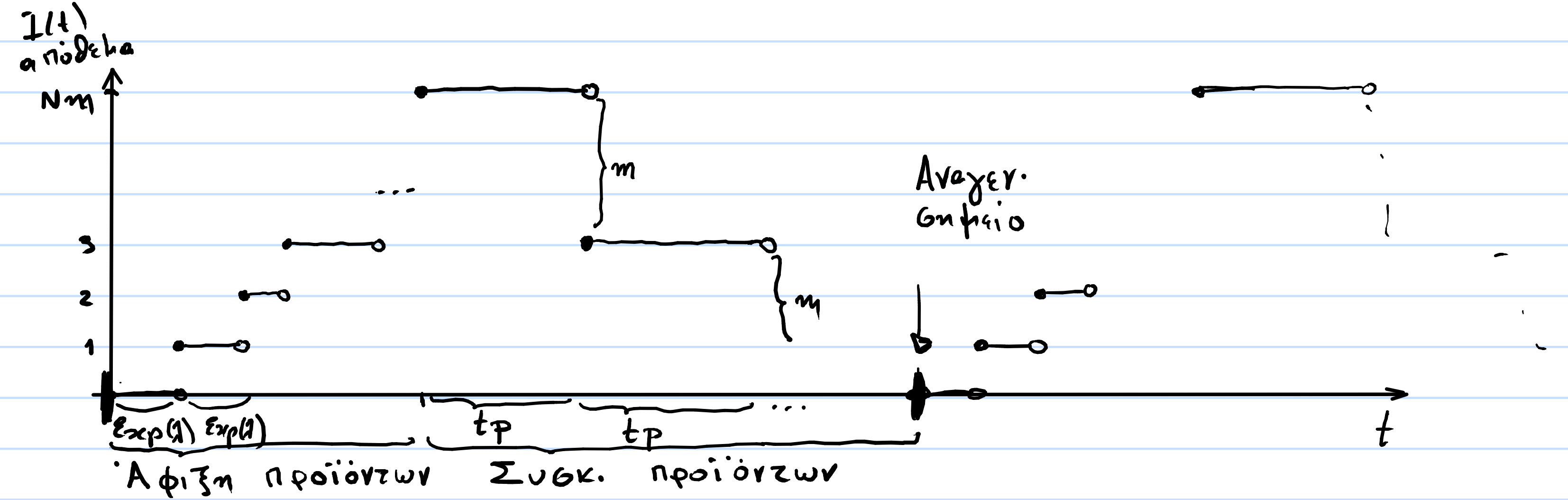


1| f_r = Μακροπρ. ποσοστό χρόνου υποδ. προϊόντων

f_p = Μακροπρ. ποσοστό χρόνου συσκευασίας

2| c = Μακροπροθ. ρυθμός κόστους =;

3| Συνολικό κόστος αποθ/συσκ για 1 κουτί =;



1| Δομή κόστους : $c(u)=\begin{cases} 1, & \text{αν το συστ. δέχεται προϊόντα τη στιγμή } u \\ 0, & \text{αν τα συσκευάζει τη στιγμή } u \end{cases}$

$C(t)=\int_0^t c(u)du$: Κόστος στο $(0,t]$ = Συνολ. χρόνος υποδοχής εργασιών στο $(0,t]$

Άρα: E[Κόστος σε 1 κύκλο] = Μέσος χρόνος υποδ. εργ. $= Nm\cdot\frac{1}{\lambda}$

E[Διάρκεια κύκλου] = Μέσος χρόνος υποδ. εργ. + συσκευασίας

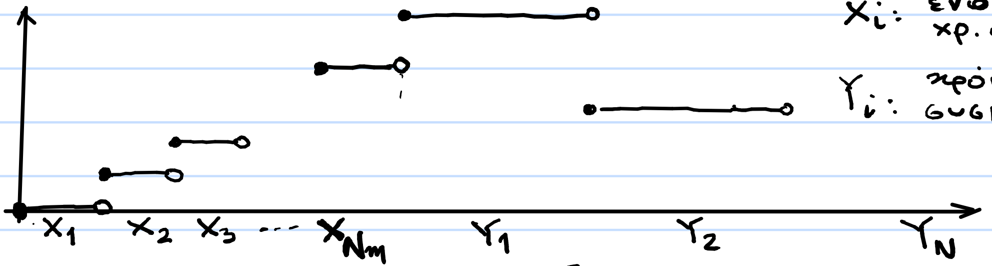
$= Nm\cdot\frac{1}{\lambda} + Nt_p$

ΣΑΘΚ

$f_r =$ Μακροπρ. ποσοστό χρόνου υποδοχής εργ $= \dfrac{E[\text{Χρονος υποδ. σε 1 κύκλο}]}{E[\text{Διάρκεια κύκλου: υποδ+συσκ}]} = \dfrac{\frac{\cancel{N}m}{\lambda}}{\frac{\cancel{N}m}{\lambda} + \cancel{N}t_p}$

$$= \frac{m}{m+\lambda t_p}$$

$$f_p = 1 - f_r = \frac{\lambda t_p}{m + \lambda t_p}$$



X_i: ενδιαμ. χρ. αφιξ.

Y_i: χρόν. συσκευ.

2) Δομή κόστους : $C(t) =$ Κόστος αποθ + συσκ. στο $(0, t]$

$$c = \lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} \underset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{E[\text{Κόστος αποθ.+ συσκ σε 1 κύκλο}]}{E[\text{Διάρκεια κύκλου}]} \leftarrow \frac{Nm}{\lambda} + Nt_p$$

$E[\text{Κόστος συσκ. σε 1 κύκλο}] = N \cdot k_\sigma$

$E[\text{Κόστους αποθηκ}] = 0 \cdot c_p E[X_1] + 1 \cdot c_p \cdot E[X_2] + 2 \cdot c_p E[X_3] + \dots + (Nm-1)c_p \cdot E[X_{Nm}]$
$+ Nm \cdot c_p E[Y_1] + (N-1)m c_p E[Y_2] + (N-2)m c_p E[Y_3] + \dots + m c_p E[Y_N]$

Άρα

$$C = \frac{N k_b + c_p \cdot \frac{1}{\lambda}\left(0+1+2+\cdots+(Nm-1)\right) + m c_p t_p \left(N+(N-1)+(N-2)+\cdots+1\right)}{Nm \cdot \frac{1}{\lambda} + N t_p}$$

$$= \frac{N k_b + \frac{c_p}{\lambda} \cdot \frac{(Nm-1)\cdot Nm}{2} + m c_p t_p \frac{N(N+1)}{2}}{\frac{Nm}{\lambda} + N t_p}.$$

$$= \frac{2\lambda N k_b + Nm(Nm-1)c_p + \lambda N(N+1) m t_p c_p}{2Nm + 2\lambda N t_p}$$

3) Κόστος ανά κουτί $= \dfrac{E[\text{Κόστος σε 1 κύκλο}]}{N}$

$$= k_b + \frac{c_p (Nm-1)m}{2\lambda} + \frac{c_p (N+1) m t_p}{2}$$

③ Ασκ. 4.2 / Φυλ. 2 (Θέμα 2 - Σεπτ. 2019)

- Επιθεωρήσεις μηχανής σύμφωνα με διαδ. Poisson $\{N(t)\}$ ρυθμού μ.
- Μετά την επιθεώρηση → Αντικατ. μηχ. με καινούργια με χρ. ζωής $\sim Exp(\nu)$
- Μετά από βλάβη πριν επιθεωρ. → Αντικατ. μηχ. με μεταχ. εφεδρ. με χρ. ζωής Erlang (2, λ).
- Μετά από βλάβη εφεδρ → Ανενεργή μηχ. μέχρι τη νέα επιθ.
- Κόστη αντικ: a για καιν., b για μεταχ.
- Κόστος ενεργ./χρον. μον: C_a καιν., C_b μεταχ.
- Ρυθμός παραγ. προϊόντων: ξ
- Έσοδο ανά προϊόν: p

1) Μακροπρ. ποσοστό χρόνου λειτουργίας μηχανής = ;

2) Μακροπρ. μέσος ρυθμός κέρδους = Έσοδα από προϊόντα − Κόστη / χρον. μον = ;

Λύση:

Κύκλος: Διάστημα μεταξύ δυο επιθεωρήσεων

Τύποι κύκλων: 1ος

$$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{Exp(\mu):\ \text{Χρόνος επιθ.}}}^{Exp(\gamma):\ \text{Χρόνος ζωής αρχικής}}$$

2ος

$$\underbrace{\overbrace{\qquad\qquad}^{Exp(\gamma):\ \text{Χρόνος αρχ}}\overbrace{\qquad\qquad}^{Erlang(2,1):\ \text{Χρόνος εφεδρ.}}}_{Exp(\mu):\ \text{Χρόνος επιθ.}}$$

3ος

$$\underbrace{\overbrace{\qquad\qquad}^{Exp(\gamma)}\overbrace{\qquad\qquad}^{Erlang(2,1)}\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{Ανενεργή}}}_{Exp(\mu):\ \text{Χρόνος επιθ.}}$$

X = Χρόνος ζωής αρχικής $\sim Exp(\gamma)$

Y = Χρόνος ζωής εφεδρικής $\sim Erlang(2,1)$

Z: Χρόνος μέχρι την επιθ $\sim Exp(\mu)$

Μακρ. ποσοστό χρόνου λειτουργίας μηχανής $= \dfrac{E[\text{Χρόνος λειτ. σε 1 κυκλο}]}{E[\text{Διαρκ. κύκλου}]}$

$E[\text{Διαρκ. κύκλου}] = E[Z] = 1/\mu$

$E[\text{Χρόνος λειτ. σε 1 κύκλο}] = E[\min(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ζωή}\\ \text{αρχ}}}{X} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ζωή}\\ \text{εφεδρ}}}{Y}, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{χρόνος μέχρι}\\ \text{την επιθεωρ.}}}{Z})]$

$$E[\min(X+Y,Z)] = \int_0^\infty Pr[\min(X+Y,Z)>t]\,dt$$

$$= \int_0^\infty Pr[X+Y>t]\,Pr[Z>t]\,dt = \int_0^\infty P[X+Y>t]\,e^{-\mu t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty Pr[X+y>t]\,f_Y(y)\,dy\,e^{-\mu t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \Pr[\underbrace{X}_{\sim Exp(\nu)} + y > t]\, \overbrace{f_Y(y)}^{Erlang(2,\lambda)}\, dy\, e^{-\mu t} dt$$

Όμως: $\Pr[X+y>t] = \begin{cases} e^{-\nu(t-y)} & , y \le t \\ 1 & , y > t \end{cases}$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-\nu(t-y)} \frac{\lambda^2}{1!} y e^{-\lambda y} dy\, e^{-\mu t} dt + \int_0^\infty \int_t^\infty 1 \cdot \frac{\lambda^2}{1!} y e^{-\lambda y} dy\, e^{-\mu t} dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty y e^{(\nu-\lambda)y} \int_y^\infty e^{-(\nu+\mu)t} dt\, dy + \lambda^2 \int_0^\infty y e^{-\lambda y} \int_0^y e^{-\mu t} dt\, dy$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty y e^{(\nu-\lambda)y} \cdot \frac{e^{-(\nu+\mu)y}}{\nu+\mu} dy + \lambda^2 \int_0^\infty y e^{-\lambda y} \cdot \frac{1-e^{-\mu y}}{\mu} dy$$

$$= \frac{\lambda^2}{\nu+\mu} \int_0^\infty y e^{-(\lambda+\mu)y} dy + \frac{\lambda^2}{\mu} \int_0^\infty y e^{-\lambda y} dy - \frac{\lambda^2}{\mu} \int_0^\infty y e^{-(\lambda+\mu)y} dy$$

$$= \frac{\lambda^2}{\nu+\mu} \cdot \frac{1}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{\lambda^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2}{\mu} \cdot \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}$$

Άρα Μέσο ποσοστό χρόνου λειτ $= \dfrac{E[\min(X+Y, Z)]}{E[Z]} = \dfrac{\lambda^2 \mu}{(\nu+\mu)(\lambda+\mu)^2} + 1 - \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} = 1 - \dfrac{\nu}{\nu+\mu} \cdot \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}$

Εναλλακτικά:

$$\begin{matrix}\text{Μέσο ποσοστό}\\ \text{χρόνου λειτ.}\end{matrix} = 1 - \begin{matrix}\text{Μέσο ποσοστό}\\ \text{χρόνου αργίας}\end{matrix} = 1 - \frac{E[\max(Z-(X+Y),0)]}{E[Z]}$$

$$= 1 - \frac{Pr[Z > X+Y]\, E[Z-(X+Y) \mid Z > X+Y]}{E[Z]}$$

Από ισχυρή αμνήμονη:

$$(Z-(X+Y) \mid Z > X+Y) \stackrel{d}{=} Z \implies E[Z-(X+Y) \mid Z > X+Y] = E[Z]$$

και

$$Pr[Z > X+Y] = Pr[Z > X] \cdot Pr[Z > X+Y \mid Z > X]$$

$$= Pr[Z > X]\, Pr[Z > Y] = \frac{\nu}{\nu+\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2$$

οπότε

$$\begin{matrix}\text{Μέσο ποσοστό}\\ \text{χρόνου λειτουργίας}\end{matrix} = 1 - \frac{\nu\lambda^2}{(\nu+\mu)(\lambda+\mu)^2}$$

2) Μακρ. μέσος ρυθμός κέρδους $= \xi p -$ Μακρ. μέσος ρυθμός κόστους

Μακρ. μέσος ρυθμός κόστους $= \dfrac{E[\text{Κόστος σε 1 κύκλο}]}{E[\text{Διάρκεια κύκλου}]}$

$E[\text{Διαρκ. κύκλου}] = 1/\mu.$

$$E[\text{Κόστος σε 1 κύκλο}] = a + b\Pr[X<Z] + c_a E[\min(X,Z)] + c_b \Pr[X<Z]\, E[\min(Y,Z')]$$

$Z' \sim Exp(\mu)$ υπολειπ. χρόνος μέχρι την επόμ. επιθεωρ. μετά τη βλάβη της αρχικής.

$$= a + \frac{b\nu}{\nu+\mu} + \frac{c_a}{\nu+\mu} + \frac{c_b \nu}{\nu+\mu} \underbrace{E[\min(Y,Z')]}_{\frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{(\mu+1)^2}}$$