Διαδικασία Poisson

① Βασικά Εργαλεία
- Ορισμοί διαδ. Poisson
- Θεωρ. Campbell
- Υπέρθεση / Διάσπαση διαδ. Poisson

② Ασκ. 3.1 / φυλ. 2 (Θέμα 1 - Σεπτ. 2018)

φορτηγά φθάνουν Poisson $\lambda_1 = 2$ φορτ/λεπτό $\{N_1(t)\}$
ΙΧ Poisson $\lambda_2 = 15$ ΙΧ/λεπτό $\{N_2(t)\}$ } ανεξ.

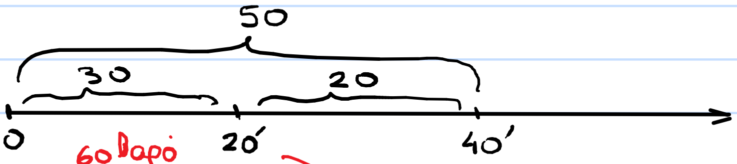
1) Δεσμ. π.θ. στα πρώτα 20': 30 φορτηγά δεδομ. ότι στα πρώτα 40' έφθασαν 50 φορτ. & 240 ΙΧ.

$$\Pr[N_1(20)=30 \mid N_1(40)=50,\ N_2(40)=240]$$

$$\Pr[N_1(20)=30 \mid N_1(40)=50, \cancel{N_2(40)=240}]$$

$$\overset{\{N_1(t)\},\ \{N_2(t)\}\ \text{ανεξ.}}{=} \frac{\Pr[N_1(20)=30, N_1(40)=50]}{\Pr[N_1(40)=50,}$$

$$= \frac{\Pr[N_1(20)=30, N_1(40)=50]}{\Pr[N_1(40)=50]}$$



$$= \frac{\Pr[N_1(20)=30, N_1(40)-N_1(20)=20]}{\Pr[N_1(40)=50]} \overset{\text{σοβαρό λάθος}}{\neq} \cancel{\frac{\Pr[N_1(20)=30, N_1(20)=20]}{\Pr[N_1(40)=50]}}$$

$$\overset{\text{Ανεξ. προσ.}}{=} \frac{\Pr[N_1(20)=30]\Pr[N_1(40)-N_1(20)=20]}{\Pr[N_1(40)=50]}$$

$$\overset{\text{Ομογ. προσ.}}{=} \frac{\Pr[N_1(20)=30]\Pr[N_1(20)=20]}{\Pr[N_1(40)=50]}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-2\cdot 20}} \cdot \frac{(\cancel{2}\cdot 20)^{30}}{30!} \cdot \cancel{e^{-2\cdot 20}} \cdot \frac{(\cancel{2}\cdot 20)^{20}}{20!}}{\cancel{e^{-2\cdot 40}} \cdot \cancel{\frac{(\cancel{2}\cdot 40)^{50}}{50!}}}$$

$$= \frac{50!}{30!\,20!} \cdot \frac{20^{50}}{40^{50}} = \binom{50}{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50}.$$

$$N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t), \quad \lambda_1 = 2$$

$$N_2(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_2 t), \quad \lambda_2 = 15$$

2] Δεσμ. πιθ. σε μισή ώρα λειτ. να έχουν αφιχθεί 300 IX δεδ. ότι στην ίδια μισή ώρα έχουν φθάσει 360 οχήματα.

$$N_1(t) \sim \text{Poisson}(2t), \quad N_2(t) \sim \text{Poisson}(15t) \quad \Big\} \text{ ανεξ.}$$

$$N_1(t) + N_2(t) \sim \text{Poisson}(17t)$$

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$$

$$\Pr[N(t) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\Pr[N_2(30) = 300 \mid N_1(30) + N_2(30) = 360]$$

$$= \frac{\Pr[N_2(30) = 300,\ N_1(30) + N_2(30) = 360]}{\Pr[N_1(30) + N_2(30) = 360]}$$

$$= \frac{\Pr[N_1(30) = 60,\ N_2(30) = 300]}{\Pr[N_1(30) + N_2(30) = 360]}$$

$$\overset{\text{ανεξ. } N_1(t),\ N_2(t)}{=} \frac{\Pr[N_1(30) = 60]\,\Pr\{N_2(30) = 300\}}{\Pr[N_1(30) + N_2(30) = 360]}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-2\cdot 30}} \cdot \frac{(2\cdot 30)^{60}}{60!} \cdot \cancel{e^{-15\cdot 30}} \cdot \frac{(15\cdot 30)^{300}}{300!}}{\cancel{e^{-17\cdot 30}} \cdot \frac{(17\cdot 30)^{360}}{360!}}$$

$$= \frac{360!}{60!\,300!}\,\frac{2^{60}\cdot 15^{300}}{17^{360}}$$

$$= \binom{360}{60} \cdot \left(\frac{2}{17}\right)^{60} \cdot \left(\frac{15}{17}\right)^{300}$$

3) π.θ. 1º φορτηγό είναι το 8º όχημα που αφ.

$= Pr[I_1 = IX, I_2 = IX, \ldots, I_7 = IX, I_8 = \Phi]$, όπου

$= Pr[I_1 = IX] Pr[I_2 = IX] \cdots Pr[I_7 = IX] Pr[I_8 = \Phi]$ I_n: Τύπος (IX ή Φ) της n-οστής άφιξης

$= \left(\frac{15}{17}\right)^7 \cdot \frac{2}{17}$.

ανεξ.

$Pr[I_n = IX] = \frac{15}{17} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

$Pr[I_n = \Phi] = \frac{2}{17} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

Αλλιώς:

$S_1^{IX}, S_2^{IX}, \ldots$: Χρόνοι αφιξ. IX $\longrightarrow \{N_2(t)\}$

$S_1^{\Phi}, S_2^{\Phi}, \ldots$: Χρόνοι αφιξ. Φ $\longrightarrow \{N_1(t)\}$

Ζητούμ. π.θ $= Pr[N_2(S_1^{\Phi}) = 7]$

$$= \int_0^\infty Pr[N_2(S_1^{\Phi}) = 7 \mid S_1^{\Phi} = x]\, f_{S_1^{\Phi}}(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty Pr[N_2(x) = 7]\, f_{S_1^{\Phi}}(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-15\cdot x} \cdot \frac{(15x)^7}{7!}\, 2 \cdot e^{-2x}\, dx$$

$$= \frac{15^7 \cdot 2}{7!} \int_0^\infty x^{7 = 8-1} e^{-17x}\, dx = \frac{15^7 \cdot 2}{\cancel{7!}} \cdot \frac{\cancel{7!}}{17^8} \boxed{\underbrace{\int_0^\infty \frac{17^8}{7!} x^{8-1} e^{-17x}\, dx}_{\text{σ.π.π. Erlang}(8,17)}}^{=1}$$

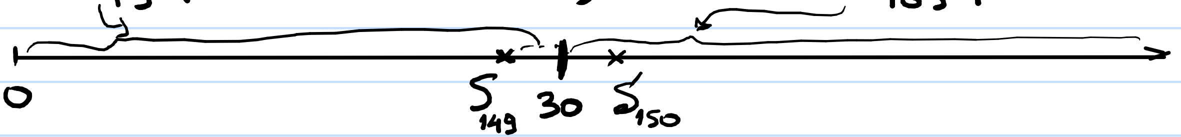
$= \left(\frac{15}{17}\right)^7 \cdot \frac{2}{17}$.

4) Δεσμ. μέσοι χρόνοι εμφάνισης του 75ου και του 183ου οχήματος δεδομ. ότι στην 1η μισή ώρα λειτουργίας εμφανίστηκαν 149 οχήματα.

$S_1, S_2, \dots$: Χρόνοι εμφάνισης οχημάτων

$N(t) = \#$ οχημάτων μέχρι τη στιγμή t ($t \to$ λεπτά)

$E[S_{75} \mid N(30)=149] =$; $E[S_{183} \mid N(30)=149] =$;



$$E[S_k \mid N(t)=n] \underset{k\le n}{=} E[U_{k:n}] = \frac{kt}{n+1}$$

$$E[S_k \mid N(t)=n] \underset{k>n}{=} t + (k-n)\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$$E[S_{75} \mid N(30)=149] = \frac{75\cdot 3\cancel{0}}{15\cancel{0}} = 15$$

$$E[S_{183} \mid N(30)=149] = 30 + 34\cdot\frac{1}{17}$$

$$= 32.$$

② Άσκ. 3.5 / Φυλ. 1

$$\left.\begin{array}{ll}\{N_1(t): t \geq 0\} & \text{Poisson με ρυθμό } \lambda_1 \\ \{N_2(t): t \geq 0\} & \quad \text{—''—} \qquad \lambda_2\end{array}\right\} \text{ανεξ.}$$

$A_i = \#$ γεγον. στην $\{N_i(t)\}$ πριν το 1ο γεγονός στην άλλη.

1| $\Pr[A_i = n] =$;

2| A_1, A_2 ανεξ ;

1| $\Pr[A_1 = n] = \Pr[I_1 = 1, I_2 = 1, \ldots, I_{n-1} = 1, I_n = 1, I_{n+1} = 2]$, $I_i =$ τύπος του i γεγον. της υπερθ.

$$= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Όμοια $\Pr[A_2 = n] = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^n \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

2| $\Pr[\underbrace{A_1 > 0, A_2 > 0}_{=0}] \neq \underbrace{\Pr[A_1 > 0]}_{\neq 0} \underbrace{\Pr[A_2 > 0]}_{\neq 0} \neq 0 \Rightarrow A_1, A_2$ όχι ανεξ.

$A_1 > 0 \Rightarrow A_2 = 0$