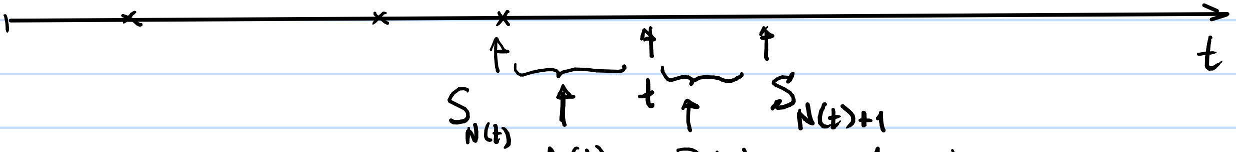
Ανανεωτική Θεωρία: Ανανεωτική Εξίσωση, Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ)

① Ασκ.2.9 / Φυλ.1 - 2ο μέρος (το 1ο μέρος υπάρχει στην Βιντεοδιαλ. 8 - Χωρίο 8)



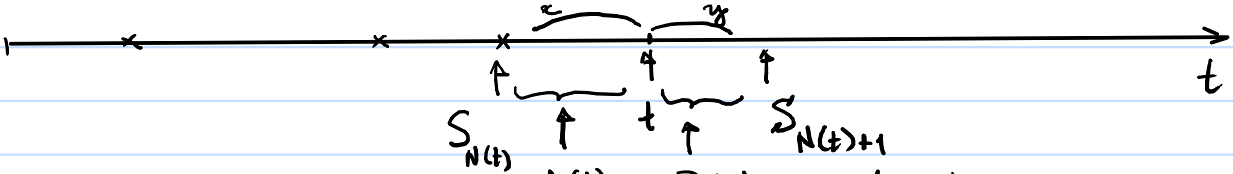
$\underbrace{A(t)}_{\text{ηλικία}}$ $R(t)$: υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης

$h(t) = Pr[R(t) > x]$

1ο μέρος: Ανανεωτική εξίσωση $h(t) = \underbrace{1 - F_X(x+t)}_{d(t)} + \int_0^t h(t-x)\,dF_X(x)$

ΒΑΘ: $\lim_{t\to\infty} h(t) = \dfrac{\int_x^\infty (1-F_X(u))\,du}{\mu}$, $\mu = E[X]$

$\lim_{t\to\infty} Pr[A(t) > x] = ;$ $\lim_{t\to\infty} Pr[A(t) > x, R(t) > y] = ;$



$\underbrace{A(t)}_{\text{ηλικία}}$ $\quad R(t)$: υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης

$\{A(t) > x\} = \{$στο διάστημα $[t-x, t]$ όχι γεγον.$\} = \{R(t-x) > x\}$

$\{A(t) > x,\ R(t) > y\} = \{$στο διάστημα $[t-x, t+y]$ όχι γεγον.$\} = \{R(t-x) > x+y\}$

$$\lim_{t\to\infty} Pr[A(t) > x] = \lim_{t\to\infty} Pr[R(\overbrace{t-x}^{u}) > x] = \lim_{u\to\infty} Pr[R(u) > x]$$

$$= \frac{\int_x^\infty 1 - F_X(u)\,du}{\mu}.$$

$$\lim_{t\to\infty} Pr[A(t) > x,\ R(t) > y] = \lim_{t\to\infty} Pr[R(\overbrace{t-x}^{u}) > x+y] = \lim_{u\to\infty} Pr[R(u) > x+y]$$

$$= \frac{\int_{x+y}^\infty (1 - F_X(u))\,du}{\mu}$$

② Ασκ. 2.5 / Φυλ. 2 (Ιούνιος 2020 Θ. 2β)

$$h(t) = \underbrace{1-e^{-\mu t}}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_x(u)}_{(h * F_x)(t)} \qquad F_x(t) = 1-e^{-\lambda t}, \ t \geq 0$$

$\tilde{h}(s) =$;

Λύση:

$$h(t) = d(t) + (h * F_x)(t) \Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s) \cdot \tilde{F}_x(s) \Rightarrow \tilde{h}(s)(1-\tilde{F}_x(s)) = \tilde{d}(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1-\tilde{F}_x(s)} = \frac{\frac{\mu}{\mu+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\frac{\mu}{\mu+s}}{\frac{s}{\lambda+s}} = \frac{\mu(\lambda+s)}{s(\mu+s)}.$$

Όμως

$$\tilde{d}(s) = \frac{\mu}{\mu+s}, \quad \tilde{F}_x(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

$$\left(\begin{array}{l} \int_0^{\infty} e^{-st}\, d\, d(t) \\ \quad \| \\ \int_0^{\infty} e^{-st} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\mu+s} \end{array} \right)$$

③ Ασκ. 2.8 / φυλ. 2

$$h(t) = \underbrace{\underbrace{\int_t^\infty e^{-\mu u}\,du}_{\frac{1-e^{-\mu t}}{\mu}}}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\,dF_x(u), \qquad F_x(t) \text{ συνεχής}$$

$\lim_{t\to\infty} h(t) =;$ Πρέπει να χρησιμ. το ΒΑΘ: $d(t) = \overbrace{d_1(t) - d_2(t)}^{d_1(t),\, d_2(t)} \geq 0$, φραγμ., $\downarrow$, $\int_0^\infty |d(t)|\,dt < \infty$

$F_x(t)$ συνεχής

Εδώ $d_1(t) = \int_t^\infty e^{-\mu u}\,du$, $d_2(t) = 0$ ≥ 0, φραγμ, $\downarrow$

Η $d_1(t)$ φραγμένη γιατί: $d_1(t) = \int_t^\infty e^{-\mu u}\,du \leq \int_0^\infty e^{-\mu u}\,du = \frac{1}{\mu} < \infty$.

$$\int_0^\infty |d(t)|\,dt = \int_0^\infty d(t)\,dt = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-\mu u}\,du\,dt = \int_0^\infty \int_0^u e^{-\mu u}\,dt\,du$$

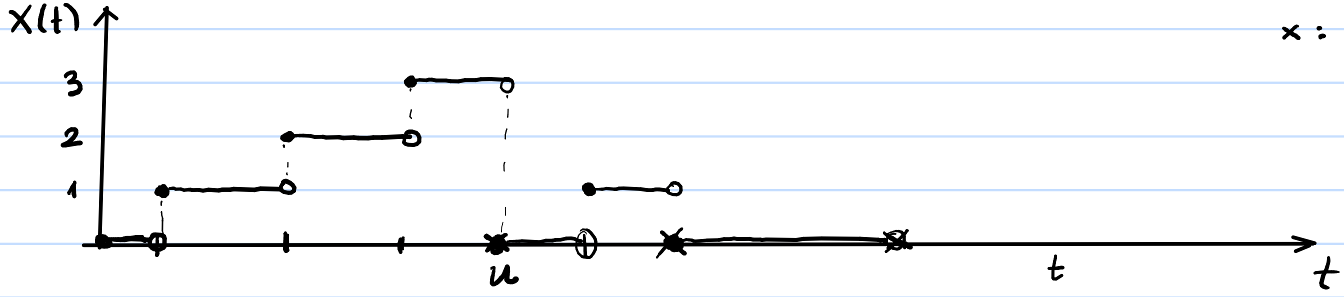
$$= \int_0^\infty u e^{-\mu u}\,du = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty u\,\mu e^{-\mu u}\,du = \frac{1}{\mu} E[Y] = \frac{1}{\mu^2} < \infty. \qquad Y \sim Exp(\mu)$$

Άρα από ΒΑΘ: $\lim_{t\to\infty} h(t) = \dfrac{\int_0^\infty d(t)\,dt}{E[X]} = \dfrac{1}{\mu^2 E[X]}$.

④ Ασκ. 2.9 / Φυλ. 2 (Θέμα 3/Σεπτ. 2019)

- Αφίξεις επιβατών συμφ. με διαδ. Poisson $\{N(t)\}$ με ρυθμό λ.
- Επισκέψεις λεωφ. χωρητικ. K τις στιγμές μιας ανανεώσ. $\{M(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιαμ. χρ. $G(t)$.
- Επίσκεψη λεωφ $\longrightarrow$ Άδειασμα στάσης (Επιβ. όσοι χωρούν, οι υπόλοιποι φεύγουν)
- $X(t) = \#$ επιβ. στη στάση τη στιγμή t
- $p_n(t) = Pr[X(t) = n]$

| : Γεγονός $\{N(t)\}$
x : —"— $\{M(t)\}$



1. Αναν. εξίσωση για την $p_n(t)$

2. $\lim_{t\to\infty} p_n(t) = ;$ για $G(t) \sim Exp(\mu)$

3. Μακροπρόθεσμο ποσοστό πελατών που αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν.

Λύση:

Χρόνος άφιξης 1ου λεωφ.

1. $$p_n(t) = Pr[X(t)=n] = \int_0^\infty Pr[X(t)=n \mid S_1=u]\, dG(u)$$

Όμως:

$$Pr[X(t)=n \mid S_1=u] = \begin{cases} \overbrace{Pr[N(t)=n]}^{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}, & u>t \\ \underbrace{Pr[X(t-u)=n]}_{p_n(t-u)} & u\le t \end{cases}$$

Άρα

$$\underbrace{p_n(t)}_{h(t)} = \underbrace{\int_t^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\, dG(u)}_{\underbrace{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}(1-G(t))}_{d(t)}} + \int_0^t \underbrace{p_n(t-u)}_{h(t-u)}\, \underbrace{dG(u)}_{dF_X(u)}$$

Ανανεωτική Εξίσωση

Για την εύρεση της $\lim_{t\to\infty} p_n(t)$ μπορώ να χρησιμοποιήσω το ΒΑΘ.

2. Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$p_n(t) = d(t) + (d * m_x)(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}(1-G(t)) + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)}\frac{(\lambda(t-u))^n}{n!}\overbrace{(1-G(t-u))}^{e^{-\mu(t-u)}}\,dm(u)$$

Για την ειδική περίπτωση $G(t) \sim Exp(\mu)$, $m(t) = E[N(t)] = \mu t$

Άρα τότε

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)t} + \int_0^t \frac{(\lambda(t-u))^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)(t-u)}\mu\, du$$

$$\underset{\substack{\| \\ x}}{t-u} \rightarrow = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)t} + \int_0^t \frac{(\lambda x)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)x}\mu\, dx$$

Άρα

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)x}\mu\, dx = \frac{\mu\lambda^n}{n!}\int_0^\infty x^{(n+1)-1}e^{-(\lambda+\mu)x}dx$$

σ.π.π. της Gamma$(n+1, \mu+\lambda)$

$$= \frac{\mu\lambda^n}{(\mu+\lambda)^{n+1}}\int_0^\infty \frac{(\mu+\lambda)^{n+1}}{n!}x^n e^{-(\lambda+\mu)x}dx = \frac{\mu\lambda^n}{(\mu+\lambda)^{n+1}}.$$

3. Μακροπροθ. ποσοστό χαμένων πελατών $= \Pr\left[\begin{array}{l}\text{πελάτης να δει κατά την} \\ \text{άφιξή του} \geq K \text{ πελάτες}\end{array}\right]$ ≠ Χρειάζεται το ΣΑΘΚ (Στοιχειώδες Αναν. Θεωρ. με Κόστη).

↑ Χρειάζεται επόμενη ύλη.

Για πληρότητα των σημειώσεων:

$$= \frac{E[\#\text{ πελατών που χάνονται σε 1 "κύκλο" = μεταξύ δυο διαδοχ. λεωφ.}]}{E[\#\text{ πελατών που φθάνουν σε 1 "κύκλο"}]}$$

$$= \frac{E[(Y-K)_+]}{E[Y]}, \quad Y = \#\text{ πελ. σε 1 κύκλο.}$$

$$\Pr[Y=i] = \int_0^\infty \Pr[N(t)=i]\,\mu e^{-\mu t}\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mu e^{-\mu t}\,dt$$

όπως σε υπολογ. πριν $\rightarrow$
$$= \frac{\lambda^i \mu}{(\lambda+\mu)^{i+1}} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i = \left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i, \quad i \geq 0$$

δηλ. η Y είναι γεωμετρική με παράμετρο $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, οπότε έχει την αμνήμονη ιδιότητα (διακριτό ανάλογο της εκθετικής), οπότε

$(Y-K \mid Y \geq K) \stackrel{d}{=} Y$. Επομένως

$$E[(Y-K)_+] = \Pr[Y<K]\, \underbrace{E[\cancel{(Y-K)_+ \mid Y<K}]}_{\to 0} + \Pr[Y \geq K]\, \overbrace{E[(Y-K)_+ \mid Y \geq K]}^{E[Y]}$$
$$= \Pr[Y \geq K]\, E[Y].$$

Άρα:

$$\text{Μακροπροθ. ποσοστό χαμένων πελατών} = \frac{E[(Y-K)_+]}{E[Y]} = \frac{\Pr[Y \geq K]\, \cancel{E[Y]}}{\cancel{E[Y]}} = \Pr[Y \geq K]$$
$$= \sum_{i=K}^{\infty} \Pr[Y=i] = \sum_{i=K}^{\infty} \left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{i} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{K}.$$

Φυσικά και χωρίς επίκληση της αμνήμονης ιδιότητας της γεωμετρικής μπορεί να γίνει ο υπολογισμός με λίγες περισσότερες πράξεις:

$$E[(Y-K)_+] = \sum_{i=0}^{\infty} (i-K)_+ \Pr[Y=i] = \sum_{i=K}^{\infty} (i-K) \Pr[Y=i]$$
$$\stackrel{j=i-K}{=} \sum_{j=0}^{\infty} j \Pr[Y=j+K] = \sum_{j=0}^{\infty} j \left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{j+K}$$
$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{K} \sum_{j=0}^{\infty} j \left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{j} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{K} E[Y] \text{ κλπ.}$$