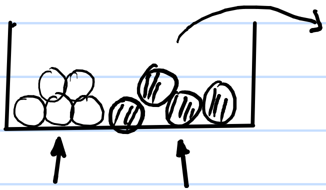
Επιχειρησιακή Έρευνα : Στοχαστικά Μοντέλα

2/3/2021

Δεσμευμένη μέση τιμή – Πιθανογεννήτριες

① Ασκ. 1.2 / φυλ. 2



n κοκ. m πρασ.

Εξαγωγή σφαιριδίου (ένα-ένα) μέχρι όλα ίδιου χρώματος.

$T_{n,m}$ = # σφαιριδίων στο τέλος ξεκιν. από n κοκ, m πρ.

$\mu_{n,m} = E[T_{n,m}]$ ← Αναδρομικό σχήμα , $\mu_{3,4} = ;$

Θ.Δ.Μ.Τ: A = εξαγ. κοκ. $\quad E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} Pr[A_n]\, E[X \mid A_n]$.

A^c = εξαγ. πρασ.

$$\mu_{n,m} = E[T_{n,m}] = \underbrace{Pr[A]}_{\frac{n}{n+m}}\, \underbrace{E[T_{n,m} \mid A]}_{= E[T_{n-1,m}]} + \underbrace{Pr[A^c]}_{\frac{m}{n+m}}\, \underbrace{E[T_{n,m} \mid A^c]}_{E[T_{n,m-1}]} = \frac{n}{n+m}\mu_{n-1,m} + \frac{m}{n+m}\mu_{n,m-1},$$

$n, m \geq 1$

Αρχικές συνθήκες: $\mu_{n,0} = n$, $\mu_{0,m} = m$, $n \geq 1, m \geq 1$.

$\mu_{n,m}$:

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	4/3		
2	2	4/3			
3	3				
4	4				

$\rightarrow \mu_{n,0} = n$

$\rightarrow \mu_{0,m} = m$

$\rightarrow \mu_{n,m} = \frac{n}{n+m} \mu_{n-1,m} + \frac{m}{n+m} \mu_{n,m-1}$

π.χ. $\mu_{1,2} = \frac{1}{3} \underbrace{\mu_{0,2}}_{2} + \frac{2}{3} \underbrace{\mu_{1,1}}_{1}$

② Ασκ.1.5/φυλ.2

r	g
κοκ	πρασ.

Σε κάθε βήμα $+j$ κοκ, $-j$ σφαιρίδια.

$X_n = \#$ κοκ. μετά από n βήματα. $E[X_n]=;$

$E[X_0] = r$. ΘΔΜΤ, δεσμεύοντας στην X_{n-1}.

$$E[X_n] = \sum_i Pr[X_{n-1}=i] \, E[X_n \mid X_{n-1}=i]$$

② Ασκ. 5/Φυλ 2

r	g
κοκ	πρασ.

Σε κάθε βήμα $\underbrace{+j \text{ κοκ}}^{\text{προσθέτουμε}}$, $\overbrace{-j \text{ σφαιρίδια}}^{\text{αφαιρούμε}}$.

$X_n = \#$ κοκ. μετά από n βήματα. $E[X_n] = ;$

$E[X_0] = r$. ΘΔΜΤ, δεσμεύοντας στην X_{n-1}.

$$E[X_n] = \sum_i \Pr[X_{n-1} = i]\, \underbrace{E[X_n \mid X_{n-1} = i]}$$

Πέρασαν $n-1$ βημ. Σύνθεση κάλπης: i κοκ. $r+g-i$ πρασ.

$(X_n \mid X_{n-1} = i)$

Άρα $(X_n \mid X_{n-1} = i) = i + j - Y$, $Y \sim \text{Hyperg}(\underbrace{j+r+g}_{\#\text{ σφ}}, \underbrace{i+j}_{\#\text{ κοκ σφαιρ.}}, \underbrace{j}_{\#\text{ εξαγ.}})$

$$\Pr\left(\begin{matrix}\text{εξαγ.} \\ k \text{ κοκ} \\ \text{''}Y=k\end{matrix}\right) = \frac{\binom{i+j}{k}\binom{r+g-i}{j-k}}{\binom{j+r+g}{j}}$$

$i+j$	$r+g-i$
κοκ	πρασ.

εξαγ. j

$$E[Y] = j \cdot \frac{i+j}{j+r+g}$$

$$\Rightarrow E[X_n \mid X_{n-1} = i] = i + j - E[Y] = i + j - j \cdot \frac{i+j}{j+r+g}$$

$$\Rightarrow E[X_n \mid X_{n-1} = i] = (i+j)\left(1 - \frac{j}{j+r+g}\right) = (i+j) \cdot \frac{r+g}{j+r+g}.$$

Άρα:

$$E[X_n] = \sum_i \Pr[X_{n-1} = i] \cdot \underbrace{E[X_n \mid X_{n-1} = i]}_{(i+j)\frac{r+g}{j+r+g}}$$

$$= \frac{r+g}{j+r+g} \underbrace{\sum_i i \Pr[X_{n-1} = i]}_{E[X_{n-1}]} + j \frac{r+g}{j+r+g} \underbrace{\sum_i \Pr[X_{n-1} = i]}_{= 1}$$

$$= \frac{r+g}{j+r+g}\left(E[X_{n-1}] + j\right).$$

Για να βρούμε τύπο για την $E[X_n]$, ξεκινώντας από την αναδρομική σχέση

$$E[X_n] = \frac{r+g}{j+r+g} E[X_{n-1}] + \frac{r+g}{j+r+g} \cdot j$$

λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση σταθερού σημείου:

$$x = \frac{r+g}{j+r+g} x + \frac{r+g}{j+r+g} j \Rightarrow \frac{\cancel{j}}{\cancel{j+r+g}} x = \frac{r+g}{\cancel{j+r+g}} \cdot \cancel{j} \Rightarrow x = r+g.$$

Αφαιρώντας την εξίσωση σταθερού σημείου από την αναδρομική σχέση έχουμε:

$$E[X_n] - x = \frac{r+g}{j+r+g}\left(E[X_{n-1}] - x\right) = \dots = \left(\frac{r+g}{j+r+g}\right)^n \left(E[X_0] - x\right)$$

$$\Rightarrow E[X_n] - (r+g) = \left(\frac{r+g}{j+r+g}\right)^n \left(r - (r+g)\right)$$

$$\Rightarrow E[X_n] = r + g - \left(\frac{r+g}{j+r+g}\right)^n g, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

③ Πιθανογεννήτρια γεωμετρικής με ΘΔΜΤ

$X = \#$ επιτυχιών ως την $1^{η}$ αποτυχία σε ανεξ. δοκ. με πιθ. επιτ. p.
$Y_1 =$ αποτελ. $1^{ης}$ δοκιμής.

$$P_X(z) = E[z^X] = \underbrace{\Pr[Y_1 = E]}_{p} \, \underbrace{E[z^X \mid Y_1 = E]}_{E[z^{1+X'}]} \leftarrow \Big(\text{επειδή } (X \mid Y_1 = E) \stackrel{d}{=} 1 + X' \text{ με } X' \stackrel{d}{=} X \Big)$$

$$+ \underbrace{\Pr[Y_1 = A]}_{1-p} \, \underbrace{E[z^X \mid Y_1 = A]}_{\underbrace{E[z^0]}_{1}}$$

$$\Rightarrow P_X(z) = pz \underbrace{E[z^{X'}]}_{P_X(z)} + (1-p) \Longrightarrow P_X(z) = \frac{1-p}{1-pz}.$$