6/5/19 Μάθημα 16

Σ.Φ.Ε.Ε.

Ανανεωτικές Διαδικασίες Κόστους

[Μια δομή κόστους εμπλέκει και στοχαστικές διαδικασίες και βελτιστοποίηση πρέπει να "σέβεται", λοιπόν, τη στοχαστική περιοδικότητα]

① Ορισμός

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots$ και χρόνους γεγονότων $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$

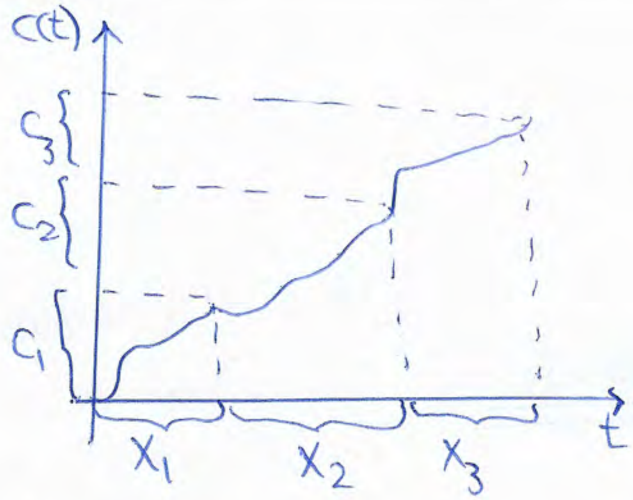
Μια στοχαστική διαδικασία $\{C(t)\}$ λέγεται διαδικασία κόστους συμβατή με τη $\{N(t)\}$ (ή ανανεωτική διαδικασία κόστους), αν τα ζεύγη $(X_n, C_n), n \geq 1$, όπου $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$, είναι ανεξάρτητα και ισόνομα. Η από κοινού σ.κ.

$$F_{X,C}(x,y) = Pr[X_n \leq x, C_n \leq y]$$

λέγεται γεννώσα σ.κ. της $\{C(t)\}$.

[Διαίσθηση: Έστω $N(t)$ να περιγράφει το απόθεμα μίας αποθήκης. Μας ενδιαφέρει το κόστος που συσσωρεύεται έναν κύκλο (ενδεχομένως αρνητικό αν είναι κέρδος). Θέλουμε το κόστος ενός κύκλου να μην εξαρτάται από κόστη και διάρκειες άλλων κύκλων γι' αυτό ζητάμε τα (X_n, C_n) να είναι ανεξάρτητα → προσπαθούμε να φτιάξουμε μία αρκετά γενική θεωρία κόστους. Να σημειωθεί ότι τα C_n δεν είναι απαραίτητο να είναι ανεξάρτητα από τα X_n · ως ζεύγη είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα τα (X_n, Y_n)]

Σχηματικά, έχουμε:



② Αθροιστική διαδικασία κόστους

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία και $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Η $\{C(t)\}$ με $C(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} g(\underbrace{X_n}_{\text{χρόνος}}, \overbrace{Y_n}^{\text{τυχαίοι παράγ.}})$ λέγεται αθροιστική διαδικασία κόστους (μέχρι το 1° γεγονός της $\{N(t)\}$ το κόστος είναι 0, πχ η $\{N(t)\}$ αναφέρεται στη λειτουργία και τη συντήρηση ενός μηχανήματος. Όσο το μηχάνημα δουλεύει, δεν έχω κόστος. Μόλις χρειαστεί συντήρηση, ακαριαία-αθροιστικά έχω κόστος, το οποίο σίγουρα εξαρτάται και από το πόσος χρόνος πέρασε από την προηγούμενη συντήρηση του μηχανήματος)

- Η $\{C(t)\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία κόστους.

Αιτιολόγηση:

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} g(X_i, Y_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(X_i, Y_i) = g(X_n, Y_n).$$

Άρα, $(X_n, C_n) = (X_n, g(X_n, Y_n))$, $n \geq 1$, ανεξάρτητα και ισόνομα ζεύγη.

③ Παραδείγματα

1] $g(x, y) = cx$.

Τότε, $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} c X_i = c \cdot S_{N(t)}$.

2] $g(x,y)=1$.

Τότε, $C(t)=N(t)$ (κάθε φορά που γίνεται γεγονός της $\{N(t)\}$, πληρώνω και 1€)

3] $g(x,y)=y$.

Τότε, $C(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ (σύνθετη ανανεωτική διαδικασία)

4] Έχουμε μία μηχανή που επιθεωρείται τις στιγμές μιας $\{N(t)\}$ ανανεωτικής διαδικασίας. Σε κάθε επιθεώρηση πληρώνονται:

- Πάγιο κόστος επιθεώρησης K (σταθερό, πληρώνεται πάντα)
- Κόστος ανταλλακτικών Y_n (τυχαία μεταβλητή)
- Κόστος ενέργειας: c ανά χρονική μονάδα από προηγούμενη επιθεώρηση.

Εδώ,

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i,Y_i),$$

όπου $g(x,y)=\underbrace{K}_{\text{πάγιο}}+\underbrace{y}_{\text{κόστος ανταλλακτικών}}+\underbrace{cx}_{\text{κόστος ενέργειας για συνολικό χρόνο } x}$.

④ Ρυθμός Κόστους

Έστω $\{C(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους (όχι κατ' ανάγκη αθροιστική), συμβατή με την $\{N(t)\}$ (δουλεύουμε πάντα στο πλαίσιο μιας αρχικής ανανεωτικής διαδικασίας).

- Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Κόστους:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)^{\leftarrow \text{τ.μ.}}}{\underbrace{t}_{\text{τ.μ.}}} : \text{τυχαία μεταβλητή}$$

- Μακροπρόθεσμος Μέσος Ρυθμός Κόστους:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} : \text{αριθμός}$$

(παρατηρούμε ότι για $g(x,y)=1$, οπότε $C(t)=N(t)$, έχουμε μελετήσει αυτά τα όρια: ΣΑΘ. Τώρα γενικεύουμε: ΣΑΘ με κόστη)

⑤ Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη (ΣΑΘΚ)

ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΘΑ ΠΕΣΕΙ ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ!

Θεώρημα Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία και $\{C(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους με γεννώσα σ.κ. $F_{X,C}(x,y)$. Αν $E[X]<\infty$ και $E[C]<\infty$, τότε

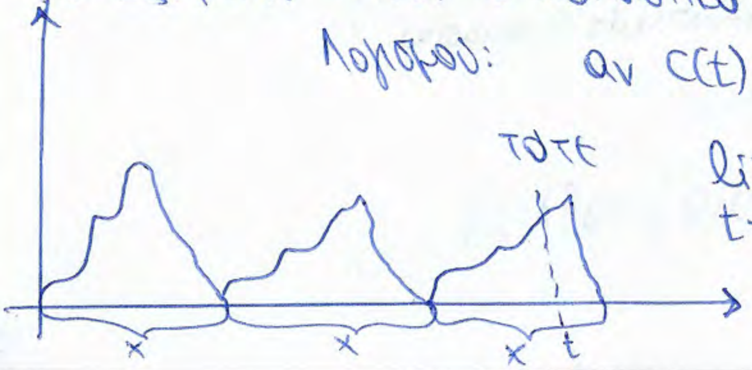
i) $$\Pr\left[\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}\right]=1$$

ii) $$\lim_{t\to\infty}\frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}$$

(Διαισθητικά λογικό: αφού τα (X_n, C_n) είναι ανεξ. και ισόνομα, αντί να κοιτάμε σε άπειρο ορίζοντα, μπορούμε να κοιτάμε σε έναν κύκλο και να λέμε ότι ο μέσος ρυθμός κόστους $= \dfrac{\text{κόστος ανά κύκλο}}{\text{μήκος κύκλου}}$, άρα είναι λογικό να βγαίνει μία συνάρτηση των $\frac{C}{X}$. Αυτό που δεν είναι προφανές, λόγω της τυχαιότητας, είναι γιατί να βγαίνει $\dfrac{E[C]}{E[X]}$)

Συνδέουμε το στοχαστικό με το ντετερμινιστικό:
Το ΣΑΘΚ είναι το στοχαστικό ανάλογο της εξής άσκησης Απειροστικού Λογισμού: αν $C(t)$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο x, τότε

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t c(u)\,du}{t} = \frac{\int_0^x c(u)\,du}{x}.$$



Ιδέα απόδειξης:

$$\frac{\int_0^t c(u)du}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{x} \rfloor} \int_{(i-1)x}^{ix} c(u)du + \int_{\lfloor \frac{t}{x} \rfloor x}^{t} c(u)du}{\frac{t}{x} \cdot x} =$$

$$= \frac{\overbrace{\lfloor \frac{t}{x} \rfloor}^{} \int_0^x c(u)\,du}{\frac{t}{x} \cdot x} + \underbrace{\frac{\int_{\lfloor \frac{t}{x} \rfloor x}^{t} c(u)du}{t}}_{\downarrow \, 0} \rightarrow \frac{\int_0^x c(u)du}{x}.$$

$$\frac{\lfloor \frac{t}{x} \rfloor}{\frac{t}{x}} \downarrow 1$$

[Για την απόδειξη του ΣΑΘΚ, σπάμε σε κύκλους και χρησιμοποιούμε το Εργοδικό Θεώρημα για να πετύχουμε μέσες τιμές (Lebesgue ολοκληρώματα)]

⑥ Τυπικά Βήματα Εφαρμογής του ΣΑΘΚ σε προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας

ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ! (θα μπει)

1) Μοντελοποίηση: ορισμός $\{N(t)\}$ και $\{C(t)\}$ (ή των X_n, C_n)

2) Επαλήθευση ορισμού: δείχνουμε ότι (X_n, C_n) ανεξάρτητες και ισόνομες / Εύρεση της γεννώσας $F_{X,C}(x,y)$

3) ΣΑΘΚ: υπολογισμός $E[X], E[C]$

4) Βελτιστοποίηση ρυθμού κόστους με έλεγχο παραμέτρων

αν πχ κάνω διαρκώς επισκευές, θα πληρώνω μόνο κόστη. Αν δεν κάνω για πολύ μεγάλο διάστημα με σκοπό να γλιτώσω χρήματα, τότε θα χαλάσει το μηχάνημα. Άρα χρειάζεται μία βέλτιστη πολιτική!

⑦ Εφαρμογή 1: Πολιτική Συντήρησης Μηχανήματος

(Παράδειγμα - Οδηγός!)

- Μηχάνημα
- O_n = n-οστός χρόνος λειτουργίας
  ↳ operating
- D_n = n-οστός χρόνος επισκευής
  ↳ down-tim

Γενικά, D_n, O_n μπορεί να είναι εξαρτημένες τ.μ., αλλά οι (O_n, D_n), $n \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με συνεχή σ.κ. $F_{O,D}(x,y)$.

Πολιτική συντήρησης: Το μηχάνημα επιθεωρείται s χρονικές μονάδες μετά την έναρξη κάθε χρόνου λειτουργίας ή νωρίτερα αν συμβεί βλάβη $(O_n < s)$.

C_p: κόστος προληπτικής συντήρησης
↳ preventive

C_f: κόστος επείγουσας συντήρησης λόγω βλάβης
↳ failure

Να βρεθούν:

i) Μακροπρόθεσμος Μέσος Ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του s

ii) Βέλτιστο s.

[Τα O_n και D_n γενικά είναι εξαρτημένα. Παράδειγμα εξάρτησης O_n, D_n:

$$D_n = \begin{cases} d_1 & , \text{αν } O_n < s \\ d_2 + Y & , \text{αν } O_n \geq s \end{cases} , \quad d_1 << d_2 , Y \text{ τ.μ.}$$
]

Λύση:

Ακολουθούμε τα (πολύ σημαντικά) βήματα που περιγράψαμε στην προηγούμενη σελίδα.

1] $\{N(t)\}$ είναι η ανανεωτική διαδικασία που αντιστοιχεί στις ενάρξεις των O_n, με ενδιάμεσους χρόνους $X_n = \min(O_n, s) + D_n$.

Κόστη: $$\underbrace{C(t)}_{\text{πόσα πληρώσαμε μέχρι τη χρονική στιγμή } t} = \sum_{i=1}^{N(t)\leftarrow \text{πόσα γεγονότα έγιναν μέχρι την } t} \Big(\underbrace{C_f \cdot 1_{\{O_i \leq s\}}}_{\text{κόστος επείγουσας συντήρησης στον } i\text{-οστό κύκλο}} + \underbrace{C_p \cdot 1_{\{O_i > s\}}}_{\text{κόστος προληπτικής συντήρησης στον } i\text{-οστό κύκλο}} \Big) , \quad \text{δηλαδή } C(t) = \sum C_n ,$$

όπου $C_n = c_f \cdot 1_{\{O_n \leq S\}} + c_p \cdot 1_{\{O_n > S\}}$.

2) Επαλήθευση του ορισμού:

$$(X_n, C_n) = \left(\min(O_n, S) + D_n,\ c_f \cdot 1_{\{O_n \leq S\}} + c_p \cdot 1_{\{O_n > S\}} \right) =$$

$= f(O_n, D_n) \rightarrow$ ανεξάρτητες και ισόνομες, $n \geq 1$, επειδή οι (O_n, D_n), $n \geq 1$, είναι από υπόθεση ανεξάρτητες και ισόνομες.
(Εδώ δεν χρειάστηκε η γεννώσα σ.κ.)

3) Το ΣΑΘΚ είναι εφαρμόσιμο (αν $E[X], E[C] < \infty$), και

$$\underset{\substack{\text{δε βάζουμε } X_n \text{ γιατί} \\ \text{είναι ανεξ. και ισόνομα}}}{E[X]} = E\left[\min(O_n, S) + D_n\right] =$$

$$= \int_0^\infty \Pr\left[\overbrace{\min(\underbrace{O_n}_{\substack{\text{αυτό είναι το στοχαστικό} \\ \text{κομμάτι του min}}}, S) > x}^{= \begin{cases} 0, & x \geq S \\ \Pr[O_n > x], & x < S \end{cases}}\right] dx + E[D] =$$

$$= \int_0^S \Pr[O_n > x]\, dx + E[D] = \int_0^S (1 - F_O(x))\, dx + E[D].$$

$$\underset{\substack{\text{δε βάζουμε } C_n \text{ γιατί} \\ \text{είναι ανεξ. και ισόνομα}}}{E[C]} = c_f \cdot \Pr[O_n \leq S] + c_p \cdot \Pr[O_n > S]$$

$$= c_f \cdot F_O(S) + c_p \cdot (1 - F_O(S)).$$

Άρα, εφαρμόζοντας το ΣΑΘΚ, έχουμε:

$$\text{Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους} = \lim_{t \to \infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]} \Rightarrow$$

$$C(S) = \frac{c_f \cdot F_O(S) + c_p \cdot (1 - F_O(S))}{\int_0^S (1 - F_O(x))\, dx + E[D]}$$

(Εδώ τελειώνει το κομμάτι των πιθανοτήτων και αρχίζει το δύσκολο κομμάτι της βελτιστοποίησης).

4) Βέλτιστο s = ? (βελτιστοποίηση)

Είτε είναι για $s=0$ ή για $s=\infty$ ή για τα s όπου $c'(s)=0$.

Έχουμε: $c(0) = \dfrac{c_p}{E[D]}$, $\lim_{s\to\infty} c(s) = \dfrac{c_f}{E[O]+E[D]}$

$$c'(s)=0 \Leftrightarrow \left(c_f \cdot f_O(s) - c_p f_O(s)\right)\cdot\left(\int_0^s (1-F_O(x))dx + E[D]\right) -$$
$$-\left(c_f F_O(s) + c_p(1-F_O(s))\right)(1-F_O(s)) = 0.$$

Γενικά:

Σύγκριση $c(0)$, $\lim_{s\to\infty} c(s)$ και $c(s)$ για s: $c'(s)=0$ για ολικό βέλτιστο. (μέγιστο ή ελάχιστο)

Ειδικές (εύκολες) περιπτώσεις:

4α) $\underbrace{c_p \geq c_f}_{\text{Μη ρεαλιστικό: η προληπτική συντήρηση να κοστίζει περισσότερο από την επείγουσα}}$. Τότε, $c(s) = \dfrac{\text{φθίνουσα συνάρτηση του s}}{\text{αύξουσα συνάρτηση του s}}$ $\downarrow s$, και άρα βέλτιστο $s^* = \infty$

(λογικό: δε συμφέρει να το φτιάξω προληπτικά — περιμένω να χαλάσει)

4β) $\underbrace{O_n \sim Exp(\lambda)}_{\text{λόγω της αμνησίας, } s^*=\infty}$ και $c_p < c_f$. Τότε, $c(s) = \dfrac{c_f\cdot(1-e^{-\lambda s}) + c_p \cdot e^{-\lambda s}}{\int_0^s e^{-\lambda x}dx + E[D]} =$

Αν ήταν να το συντηρήσω στα 5', θα ήταν το ίδιο να το κάνω στην αρχή και ούτω καθεξής

$$= \frac{c_f + (c_p - c_f)e^{-\lambda s} \Big\}\ \nearrow \text{ ως προς s για } c_p<c_f}{\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda s}) + E[D] \Big\}\ \nearrow \text{ ως προς s}} = \dots$$

Πάλι βγαίνει $s^* = \infty$.