18/4/19

Σ.μ.Ε.Ε.

Μαθημα 15

Ασκησεις στη Στοχαστικη Διαδικασια Poisson

① Ασκηση (θεωρείται εύκολη και κλασική άσκηση· πρέπει να την ξέρουμε)

Εισαγωγές σε νοσοκομείο σύμφωνα με σ.δ. Poisson 12/ημέρα.

(i) $Pr[5$ εισαγωγές σημερα$] = p_1$

(ii) $Pr[5$ εισαγωγές σημερα $|$ 10 εισαγωγές χθες$] = p_2$

(iii) $E[$χρόνος $3^{ης}$ εισαγωγης$] = \mu_1$

(iv) $Pr[50$ εισαγωγές στο διαστημα 17-20 Απριλίου $|$ 10 εισαγωγές σημερα (18 Απριλίου)$] = p_3$

(v) $Pr[10$ εισαγωγές σημερα: ΧΧΠΠΠ ΧΠΠΠΠ$] = p_4$

χειρουργικό περιστατικό (Χ), παθολογικό περιστατικό (Π)

(vi) $Pr[10$ εισαγωγές σημερα: 3Χ και 7Π$] = p_5$

Δίνεται: $Pr[$εισαγωγη $\to$ Χ$] = 0.2$, $Pr[$εισαγωγη $\to$ Π$] = 0.8$

Λύση:

Μοντελοποιηση: $\{N(t)\}$ σ.δ. εισαγωγών (Poisson με $\lambda = 12$/ημέρα)

↓ Διασπαση

$\{N_1(t)\}$ σ.δ. Χ-εισαγωγών (Poisson με $\lambda = 2.4$/ημέρα)

$\{N_2(t)\}$ σ.δ. Π-εισαγωγών (Poisson με $\lambda = 9.6$/ημέρα)

(i) $p_1 = Pr[\underbrace{N(1)}_{\text{ο χρόνος εδώ μετριέται σε μέρες}} = 5] = e^{-12} \cdot \frac{12^5}{5!}$

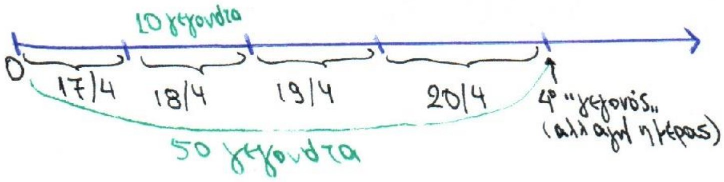
(ii) $p_2 = \Pr[\underbrace{N(2)-N(1)=5}_{\#\text{γεγονότων τη } 2^{η} \text{ μέρα} = N(2)-N(1) \text{ (σήμερα)}} \mid \underbrace{N(1)=10}_{\text{θεωρήσαμε ως αρχή του χρόνου το "χθες"}}] \underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ανεξάρτητες}}{=}} \Pr[N(2)-N(1)=5] =$

$\underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ομογενείς}}{=}} \Pr[N(1)=5] = e^{-12}\cdot\frac{12^5}{5!}$ (το περιμέναμε να βγει $p_2 = p_1$, αφού στη σ.δ. Poisson η πληροφορία για το χθες δεν επηρεάζει το σήμερα)

(iii) $\mu_1 = E[S_3] = 3\cdot E[\underset{\text{ενδιάμεσος χρόνος}}{X}] = 3\cdot \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{αφού γίνονται 12/ημέρα}} = \frac{1}{4}$ ημέρας $= 6$ ώρες

(iv) Αρχή του χρόνου βάζουμε την 17 Απριλίου, άρα

$p_3 = \Pr[N(4)=50 \mid N(2)-N(1)=10]$ σπάμε σε ξένα διαστήματα για ανεξ. προσαυξήσεις



$= \Pr[N(1) + (N(2)-N(1)) + (N(4)-N(2)) = 50 \mid N(2)-N(1)=10] =$

$= \Pr[N(1) + 10 + (N(4)-N(2)) = 50 \mid N(2)-N(1)=10] \underset{\text{ανεξ. προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ξένα διαστήματα}}{=}}$

$= \Pr[\underbrace{N(1)}_{\sim \text{Poisson}(12\cdot 1)} + (\underbrace{N(4)-N(2)}_{\sim \text{Poisson}(12\cdot 2)}) = 40] = e^{-36}\cdot\frac{36^{40}}{40!}$ $(N(1)+(N(4)-N(2)) \sim \text{Poisson}(36))$

(v) Η p_4 είναι πιθανότητα τομής, άρα θυμίζει πολλαπλασιαστικό νόμο. Όμως εδώ τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα (το ότι έγιναν 10 εισαγωγές σήμερα δεν επηρεάζει το ότι η 1η ήταν Χ), άρα

$p_4 = \underbrace{e^{-12}\cdot\frac{12^{10}}{10!}}_{\text{10 εισαγωγές σήμερα}} \cdot \underbrace{(0.2)^3}_{3\,X} \cdot \underbrace{(0.8)^7}_{7\,\Pi}.$

(vi) $P_5 = e^{-12}\cdot \dfrac{12^{10}}{10!}\cdot \binom{10}{3}\cdot(0.2)^3\cdot(0.8)^7$

② <u>Άσκηση</u>

Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι γεγονότων.

(i) $F_{S_n}(x) = ?$ (ii) $F_{(S_1|N(t)=1)}(x) = ?$

Όταν $\lambda(t)=\lambda$, γνωρίζουμε ότι $f_{S_n}(x) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\cdot x^{n-1} e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$ και

$$F_{(S_1|N(t)=1)}(x) \underset{\text{για } n=1}{\overset{\text{Θ. Campbell}}{=\!=}} \begin{cases} \frac{x}{t}, & 0\le x\le t \\ 1, & x\ge t \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

Όταν $\lambda(t)$ όχι σταθερό, τι ισχύει?

Όταν $\{N(t)\}$ είναι μη-ομογενής σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda(t)$, τότε

$\forall t \quad N(t)\sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$, όπου $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du$. Άρα,

$$F_{S_n}(x) = \Pr[S_n\le x] \overset{\text{σχέση γέφυρα}}{=\!=} \Pr[N(x)\ge n] = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(x)}\cdot\frac{(\Lambda(x))^k}{k!}$$

$$f_{S_n}(x) = \frac{d}{dx}F_{S_n}(x) = -\sum_{k=n}^{\infty}\lambda(x)e^{-\Lambda(x)}\frac{(\Lambda(x))^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(x)}\cdot\frac{\cancel{k}\cdot(\Lambda(x))^{k-1}}{\cancel{k!}\,(k-1)!}\lambda(x) =$$

$$= e^{-\Lambda(x)}\cdot\frac{(\Lambda(x))^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\lambda(x) \quad \text{(όπως στην ομογενή, αλλά με } \Lambda(t) \text{ (!))}.$$

Για $x\in[0,t]$,

$$F_{(S_1|N(t)=1)}(x) = \Pr[S_1\le x \mid N(t)=1] = \Pr[N(x)\ge 1\mid N(t)=1] =$$

$$= \frac{\Pr[N(x)\ge 1, N(t)=1]}{\Pr[N(t)=1]} \underset{\substack{N(x)\ge 1\\ N(t)=1\\ \Downarrow\\ N(x)=1\\ N(t)-N(x)=0}}{\overset{x\le t}{=\!=}} \frac{\Pr[N(x)=1, N(t)-N(x)=0]}{\Pr[N(t)=1]} \underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=\!=}}$$

$$= \frac{Pr[N(x)=1]\cdot Pr[N(t)-N(x)=0]}{Pr[N(t)=1]} = \frac{\cancel{e^{-\Lambda(x)}}\cdot\frac{(\Lambda(x))^1}{1!}\cdot \cancel{e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(x))}}}{\cancel{e^{-\Lambda(t)}}\cdot\frac{(\Lambda(t))^1}{1!}} = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}$$

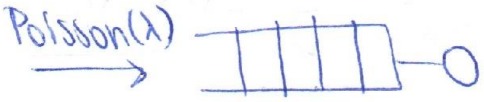
(διαισθητικά λογικό: παίρνουμε το ολοκλήρωμα του ρυθμού γιατί μας δείχνει που υπάρχει περισσότερο βάρος, δηλαδή που συμβαίνουν γεγονότα πιο γρήγορα)

③ Άσκηση

M/D/1 ουρά:
- Poisson διαδικασία αφίξεων πελατών με ρυθμό λ
- Σταθεροί χρόνοι εξυπηρέτησης d
- 1 υπηρέτης
- ∞ χώρος αναμονής

$P_n(t) = Pr[n$ παρόντες πελάτες τη στιγμή $t]$, $P_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t)$,

$P(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n}_{\text{η πιθανογεννήτρια της } (P_n)} = ?$, $P_0 = ?$, $E[Q]$ = Μέσο πλήθος πελατών



Αρχική κατάσταση $=0$, άρα $P_0(0)=1$.

Βασική ιδέα: αν είμαι τη στιγμή t και κοιτάξω την $t-d$, τότε την $t-d$ υπήρχε το πολύ ένας παραπάνω πελάτης στο σύστημα (αν ήταν π.χ. 2, τότε μετά από χρόνο d θα είχαμε έναν παραπάνω από όσους έχουμε πραγματικά)

Δεσμεύοντας στη στιγμή $t-d$, έχουμε:

$$P_n(t) = Pr[Q(t)=n] = \sum_{k=0}^{n+1} \underbrace{Pr[Q(t-d)=k]}_{P_k(t-d)}\cdot Pr[Q(t)=n \mid Q(t-d)=k] =$$

$$= P_0(t-d)\cdot \underbrace{e^{-\lambda d}\cdot\frac{(\lambda d)^n}{n!}}_{\text{πιθ. } n \text{ αφίξεων}} + \sum_{k=1}^{n+1} P_k(t-d)\, e^{-\lambda d}\,\frac{(\lambda d)^{n-(k-1)}}{(n-(k-1))!}$$

(το σπάμε στο 0 και ≥ 1, γιατί από εκεί προκύπτουν οι δύο διαφορετικές περιπτώσεις: ή δεν υπήρχε πελάτης ή υπήρχαν $k \geq 1$, και δουλεύουμε ανάλογα)

Κοιτάμε τώρα την οριακή:

για $t \to \infty$, ισχύει $P_n(t) \to P_n$. Τότε,

$$P_n = P_0 \cdot e^{-\lambda d} \cdot \frac{(\lambda d)^n}{n!} + \sum_{k=1}^{n+1} P_k e^{-\lambda d} \cdot \frac{(\lambda d)^{n-(k-1)}}{(n-(k-1))!}, \quad n \geq 0.$$

Για την πιθανογεννήτρια, πολλαπλασιάζουμε με z^n και αθροίζουμε:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = P_0 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda d} \cdot \frac{(\lambda d)^n}{n!} z^n}_{e^{-\lambda d(1-z)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n+1} P_k e^{-\lambda d} \cdot \frac{(\lambda d)^{n-k+1}}{(n-k+1)!} z^n}_{\text{θυμίζει συνέλιξη, άρα αλλάζουμε τη σειρά της άθροισης: } n+1 \geq k \Rightarrow n \geq k-1} \Rightarrow$$

$$P(z) = P_0 e^{-\lambda d(1-z)} + e^{-\lambda d} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} P_k z^{k-1}}_{\frac{P(z)-P_0}{z}} \underbrace{\sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{(\lambda d z)^{n-(k-1)}}{(n-(k-1))!}}_{e^{\lambda d z}} \Rightarrow$$

$$P(z) = e^{-\lambda d z} \cdot \left(P_0 + \frac{P(z)-P_0}{z}\right) \Rightarrow z \cdot P(z) = z \cdot e^{-\lambda d(1-z)} \cdot P_0 + e^{-\lambda d(1-z)} \cdot P(z) - e^{-\lambda d(1-z)} \cdot P_0$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{P_0 \cdot (1 - e^{-\lambda d(1-z)})}{z - e^{-\lambda d(1-z)}} \xRightarrow{\cdot e^{\lambda d(1-z)}} P(z) = \frac{P_0 \cdot (e^{\lambda d(1-z)} - 1)}{z e^{\lambda d(1-z)} - 1}.$$

Θέλουμε να βρούμε το P_0. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση κανονικοποίησης $P(1) = 1$. Όμως το $P(1)$ είναι $\frac{0}{0}$. Η $P(z)$ είναι συνεχής, άρα $P(1) = \lim_{z \to 1} P(z)$ και για το όριο χρησιμοποιούμε L' Hospital:

$$P(1) = 1 \xRightarrow{\text{L' Hospital}} \ldots \Rightarrow P_0 = 1 - \lambda d, \text{ οπότε } P(z) = \frac{(1-\lambda d)(e^{\lambda d(1-z)} - 1)}{z e^{\lambda d(1-z)} - 1}.$$

$$E[Q] = P'(1) = \ldots$$

④ <u>Άσκηση</u>

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ, τότε $Cov(N(t), N(s)) = ?$ για $s < t$.

<u>Λύση</u>: $Cov(N(t), N(s)) = Cov((N(t) - N(s)) + N(s), N(s)) =$

$= \underbrace{Cov(N(t) - N(s), N(s))}_{0 \text{ (ανεξ. προσαυξήσεις)}} + Cov(N(s), N(s)) = Var[N(s)] = \lambda s \quad (N(s) \sim Poisson(\lambda s))$

(πολύ παράξενο αποτέλεσμα: όσο μεγάλο κι αν είναι το t, η Cov εξαρτάται μόνο από τη μικρότερη χρονική στιγμή και είναι σταθ.!)