15/4/19

Σ.μ.Ε.Ε.

Μάθημα 14

Γενικεύσεις και Ασκήσεις στη Διαδικασία Poisson

① Μη-ομογενής Poisson

(πάλι "γεγονότα εντελώς τυχαία στον χρόνο", αλλά θέλουμε τώρα να μελετήσουμε π.χ. και ώρες αιχμής, άρα δεν έχουμε χρονική ομογένεια. Τώρα ο ρυθμός λ γίνεται $\lambda(t)$ μη σταθερός)

(παρόμοιος με τον Ορσ. II της σ.δ. Poisson-Μάθημα 10)

Ορισμός 1 (Τοπικός): Έστω $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια διαδικασία. Η $\{N(t)\}$ λέγεται μη-ομογενής σ.δ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$, αν

(i) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

(ii)
$$\Pr[N(t+h)=j \mid N(t)=i] = \begin{cases} 1-\lambda(t)\cdot h+o(h), & \text{αν } j=i \quad \text{δε συνέβη καινούριο γεγονός} \\ \lambda(t)\cdot h+o(h), & \text{αν } j=i+1 \\ o(h), & \text{αν } j\geq i+2 \end{cases}, \quad h\to 0^+,$$

όπου $\lim_{h\to 0^+} \frac{o(h)}{h}=0$

(παρόμοιος με τον Ορσ. III της σ.δ. Poisson)

Ορισμός 2 (Μακροσκοπικός): Έστω $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια διαδικασία. Η $\{N(t)\}$ λέγεται μη-ομογενής Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$, αν

(i) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

(ii) $$\Pr[N(s+t)-N(s)=j] = e^{-\int_s^{s+t}\lambda(u)du}\cdot \frac{\left(\int_s^{s+t}\lambda(u)du\right)^j}{j!}, \quad j=0,1,\dots$$

[δηλαδή $N(s+t)-N(s)=$(πλήθος γεγονότων στο $(s,s+t]$) $\sim \text{Poisson}\left(\int_s^{s+t}\lambda(u)du\right)$

(για $\lambda(u)=\lambda$ σταθ., παίρνουμε το αποτέλεσμα $N(t)\sim\text{Poisson}(\lambda t)$ που ξέρουμε για τις σ.δ. Poisson)]. Θέτουμε $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(u)du$. Τότε, $N(t)\sim\text{Poisson}(\Lambda(t))$. Γενικότερα, $N(t+s)-N(s)\sim\text{Poisson}(\Lambda(t+s)-\Lambda(s))$.

② Μη-ομογενής διάσπαση σ.δ. Poisson

γενίκευση της σ.δ. Poisson, όχι κάτι διαφορετικό.
Αν πάρουμε $\lambda(t)=\lambda$, τότε παίρνουμε τη γνωστή σ.δ. Poisson

<u>Θεώρημα</u> Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ και για κάθε t συνάρτηση πιθ. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i(t)=1$ ($p_i(t)$=πιθανότητα καταγραφής ενός γεγονότος της $\{N(t)\}$ τη στιγμή t ως τύπου i).
Αν $\{N_i(t)\}$, $i\geq 1$, οι απαριθμήτριες διαδικασίες των γεγονότων τύπου i, τότε

(i) $\{N_i(t)\}$, $i\geq 1$, ανεξάρτητες

(ii) $\{N_i(t)\}$, $i\geq 1$, είναι μη-ομογενείς Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)\cdot p_i(t)$ (εντελώς γενίκευση της διάσπασης "κλασικής" σ.δ. Poisson)

[Η απόδειξη γίνεται εύκολα με τον τοπικό ορισμό].

③ Σύνθετη διαδικασία Poisson

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson (ομογενής) με ρυθμό λ, και $Y_1, Y_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. (χωρίς κάποιον περιορισμό ως προς το θετικές-αρνητικές, διακριτές-συνεχείς). Η $\{Y(t)\}$ με $Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ λέγεται σύνθετη διαδικασία Poisson.

[Τώρα ασκήσεις (και στα σημερινά και στα προηγούμενα)]

④ Άσκηση

Έστω $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ σ.δ. Poisson, ανεξάρτητες με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. $\underbrace{(N_1(t)\mid N_1(t)+N_2(t)=n)}_{\text{π.χ. αν τη χρον. στιγμή } t \text{ έχουμε } n \text{ πελάτες στην τράπεζα, πόσοι είναι για κατάθεση?}} \overset{d}{\sim}$?

Λύση: για $0\leq k\leq n$,

<u>1ος τρόπος</u>: $Pr[N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n]$ =

$$= \frac{Pr[N_1(t)=k,\ N_1(t)+N_2(t)=n]}{Pr[N_1(t)+N_2(t)=n]} = \frac{Pr[N_1(t)=k,\ N_2(t)=n-k]}{Pr[N_1(t)+N_2(t)=n]} =$$

$$\underset{\text{ανεξάρτητες}}{\overset{N_1(t),\,N_2(t)}{=}} \frac{Pr[N_1(t)=k]\cdot Pr[N_2(t)=n-k]}{Pr[\underbrace{N_1(t)+N_2(t)}_{\sim \text{Poisson}((\lambda_1+\lambda_2)t)}=n]} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda_1 t}}\cdot\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\cdot \cancel{e^{-\lambda_2 t}}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}}{\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}\cdot\frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n}{n!}} = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},$$

άρα $\left(N_1(t)\,\middle|\,N_1(t)+N_2(t)=n\right) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

Αυτός ο τρόπος δεν καταδεικνύει γιατί βγήκε Bin, απλώς προέκυψε από απλοποιήσεις. Καλύτερος τρόπος είναι ο ακόλουθος:

2ος τρόπος: Για k: $0 \le k \le n$, έχουμε

$$Pr[N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n] = Pr\left[\begin{array}{l} k \text{ από τα } n \text{ γεγονότα της} \\ \text{υπέρθεσης των } \{N_1(t)\}, \{N_2(t)\} \text{ είναι τύπου } 1\end{array}\right] =$$

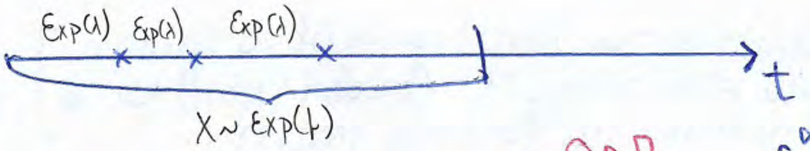
$$= Pr[k \text{ από τις } \underbrace{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n}_{\text{ανεξάρτητες, με } Pr[Z_k=1]=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}} \text{ είναι } 1] \underset{\sim Bin}{\overset{\#\text{επιτυχιών}}{=}} \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k},$$

άρα $\left(N_1(t)\,\middle|\,N_1(t)+N_2(t)=n\right) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

5 Άσκηση

Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ και $X \sim Exp(\mu)$, ανεξάρτητη της $\{N(t)\}$. $N(X) \overset{d}{\sim} ?$

Λύση:



1ος τρόπος: $Pr[N(X)=n] \underset{\text{στη συνεχή περίπτωση}}{\overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=}} \int_0^\infty Pr[N(X)=n \mid X=x]\, f_X(x)\,dx \underset{X=x}{\overset{\text{περνάμε την πληροφορία}}{=}}$

$$= \int_0^\infty Pr[N(x)=n \mid X=x]\cdot f_X(x)\,dx \underset{\substack{X \text{ ανεξ. } \{N(t)\} \\ \text{άρα φεύγει η δέσμευση}}}{=} \int_0^\infty Pr[N(x)=n]\cdot \mu e^{-\mu x}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\cdot\frac{(\lambda x)^n}{n!}\cdot \mu e^{-\mu x}\,dx = \frac{\mu\lambda^n}{n!}\int_0^\infty x^n\cdot e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx \;\underset{\text{της Gamma}(n+1,\,\lambda+\mu)}{\overset{\text{κτίζουμε τη σ.π.π.}}{=\!=}}$$

$$= \frac{\mu\lambda^n}{n!}\cdot\frac{n!}{(\lambda+\mu)^{n+1}}\cdot\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{\frac{(\lambda+\mu)^{n+1}}{n!}\cdot x^{(n+1)-1}\cdot e^{-(\lambda+\mu)x}}^{\text{Erlang}(n+1,\,\lambda+\mu)}\,dx}_{=1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n, \text{ άρα}$$

$N(X) \sim Geom\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$.

2ος τρόπος: $\Pr[N(X)=n] \underset{\text{"γέφυρα"}}{\overset{\text{σχέση}}{=\!=}} \Pr[S_n \le X < S_{n+1}] =$

$= \Pr[S_n \le X] - \Pr[S_{n+1} \le X]$. Όμως,

$$\Pr[S_n \le X] \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} \int_0^\infty \Pr[S_n \le X \mid S_n = s]\cdot f_{S_n}(s)\,ds =$$

$$= \int_0^\infty \Pr[s \le X \mid S_n = s]\cdot f_{S_n}(s)\,ds = \int_0^\infty \Pr[s \le X]\cdot f_{S_n}(s)\,ds \;\underset{S_n\sim \text{Erlang}(n,\lambda)}{\overset{X\sim Exp(\mu)}{=\!=}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu s}\cdot\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\cdot s^{n-1}\cdot e^{-\lambda s}\,ds = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(\lambda+\mu)^n}\cdot\underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^n}{(n-1)!}s^{n-1}e^{-(\lambda+\mu)s}\,ds}_{=1} =$$

$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n$. Άρα, $\Pr[N(X)=n] = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n+1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n$.

Αυτός ο τρόπος είναι ο "χειρότερος", αλλά μας δίνει την ιδέα για τον 3ο τρόπο, που είναι ο πιο ωραίος:

(Πολύ καλός!)
3ος τρόπος: Βλέπω τον X ως τον χρόνο του 1ου γεγονότος μιας σ.δ. $\{M(t)\}$ Poisson με ρυθμό μ.

$\Pr[N(X)=n] = \Pr\left[\begin{array}{l}\text{στην υπέρθεση των } \{N(t)\} \text{ και } \{M(t)\} \text{ τα πρώτα } n \\ \text{γεγονότα είναι τύπου "1" (δηλαδή } \{N(t)\}\text{) και το} \\ \text{επόμενο τύπου "2" (δηλαδή } \{M(t)\}\text{)}\end{array}\right] =$

$= \Pr[Z_1=1, Z_2=1, \ldots, Z_n=1, Z_{n+1}=2] = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

⑥ Άσκηση ('Οχι πολύ ωραία, αλλά πάντα μπαίνει ένα θέμα με υπολογιστικά στοιχεία στη σ.δ. Poisson ⇝ " Πρέπει να το ξέρετε!")

Αυτοκίνητα περνούν σε σταθμό διοδίων σύμφωνα με σ.δ. Poisson με ρυθμό 10 αυτοκίνητα το λεπτό. Κάθε αυτοκίνητο είναι Ι.Χ ή φορτηγό με πιθανότητες 0.9 και 0.1, αντίστοιχα. Να υπολογιστούν:

1) Pr [σε 2 λεπτά να περάσουν 5 φορτηγά δεδομένου ότι το 1ο λεπτό πέρασαν 7 αυτοκίνητα]

2) Μέσος χρόνος διέλευσης του 1ου φορτηγού μετά τις 12.00, αν στο διάστημα 12.00-12.05 πέρασαν 100 αυτοκίνητα

3) Pr [σε 2 λεπτά να περάσουν 5 φορτηγά δεδομένου ότι στο 1ο λεπτό πέρασαν 2 φορτηγά και 5 ΙΧ]

ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΧΕΔΟΝ ΠΑΝΤΑ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ MUST ΝΑ ΤΟ ΠΙΑΣΟΥΜΕ!

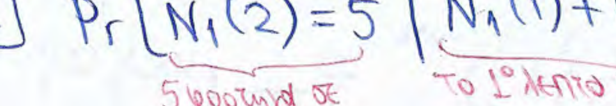
Λύση:

Μοντελοποίηση πρώτα: 'Εστω $\{N_1(t)\}$ η σ.δ. που μετράει πλήθος φορτηγών στο $(0,t]$, και $\{N_2(t)\}$ η σ.δ. που μετράει πλήθος διελεύσεων ΙΧ στο $(0,t]$.

Από Θεώρημα Διάσπασης, η $\{N_1(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_1 = 1$ φορτηγό/λεπτό ⇝ όλους τους χρόνους θα τους κάνουμε λεπτά

και η $\{N_2(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_2 = 9$ ΙΧ/λεπτό, Οι $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ είναι ανεξάρτητες. 'Εστω $S_n^{(i)}$ ο χρόνος του n-οστού γεγονότος της $\{N_i(t)\}$.

1) $Pr[\underbrace{N_1(2)=5}_{\text{5 φορτηγά σε 2 λεπτά}} \mid \underbrace{N_1(1)+N_2(1)=7}_{\text{το 1ο λεπτό πέρασαν 7 αυτοκίνητα}}]$. 'Εχουμε πληροφορία για τα $N_i(1)$ και θέλουμε για το $N_1(2)$.



έχουμε πληροφορία για χρόνο 1 και θέλουμε για χρόνο 2

Δεσμεύουμε στο $N_1(1)$: διαμερίζουμε τον δειγματικό χώρο στις τιμές που μπορεί να πάρει το $N_1(1)$ και έχουμε:

$$\Pr\left[N_1(2)=5 \mid N_1(1)+N_2(1)=7\right] =$$

$$\sum_{k=0}^{5} \Pr\left[N_1(2)=5,\ N_1(1)=k \mid N_1(1)+N_2(1)=7\right] =$$

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{\Pr\left[N_1(2)=5,\ N_1(1)=k,\ N_2(1)=7-k\right]}{\Pr\left[N_1(1)+N_2(1)=7\right]} =$$

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{\Pr\left[N_1(2)-N_1(1)=5-k,\ N_1(1)=k,\ N_2(1)=7-k\right]}{\Pr\left[N_1(1)+N_2(1)=7\right]} \quad \underline{\text{3 ανεξάρτητες τ.μ.}}$$

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{\Pr\left[N_1(2)-N_1(1)=5-k\right]\cdot \Pr\left[N_1(1)=k\right]\cdot \Pr\left[N_2(1)=7-k\right]}{\Pr\left[N_1(1)+N_2(1)=7\right]}$$

ομογενείς προσαυξήσεις: $N_1(2)-N_1(1) \stackrel{d}{=} N_1(1)$ και $N_1(1)+N_2(1) \sim \text{Poisson}(10)$

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-1}\cdot\frac{1^{5-k}}{(5-k)!}\cdot \cancel{e^{-1}}\cdot\frac{1^k}{k!}\cdot \cancel{e^{-9}}\cdot\frac{9^{7-k}}{(7-k)!}}{\cancel{e^{-10}}\cdot\frac{10^7}{7!}} = \sum_{k=0}^{5}\left(\frac{7!}{(5-k)!\,k!\,(7-k)!}\cdot\frac{9^{7-k}}{10^7}\right)$$

2]

$$E\left[S_1^{(1)} \mid \underbrace{N_1(5)+N_2(5)=100}_{\text{Θεωρούμε ότι η αρχή του χρόνου είναι 12:00}}\right]$$

(Αν δεν είχε το $N_2(5)$ η δέσμευση, θα μας θύμιζε άμεσα Campbell. Άρα, δεσμεύουμε στη $N_1(5)$ ή στη $N_2(5)$)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[S_1^{(1)} \mid N_1(5)=k,\ \underbrace{N_1(5)+N_2(5)=100}_{\text{non-πληροφορία}}\right]\cdot \Pr\Big[\underbrace{N_1(5)=k \mid N_1(5)+N_2(5)=100}_{\text{Bin}(100,\ \frac{1}{10})}\Big] =$$

$$= \sum_{k=0}^{100} \underbrace{E\left[S_1^{(1)} \mid N_1(5)=k\right]}_{\frac{1\cdot 5}{k+1}\ \text{(Θ. Campbell)}}\cdot\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^k\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{100-k} = \sum_{k=0}^{100}\frac{5}{k+1}\cdot\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^k\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{100-k}$$