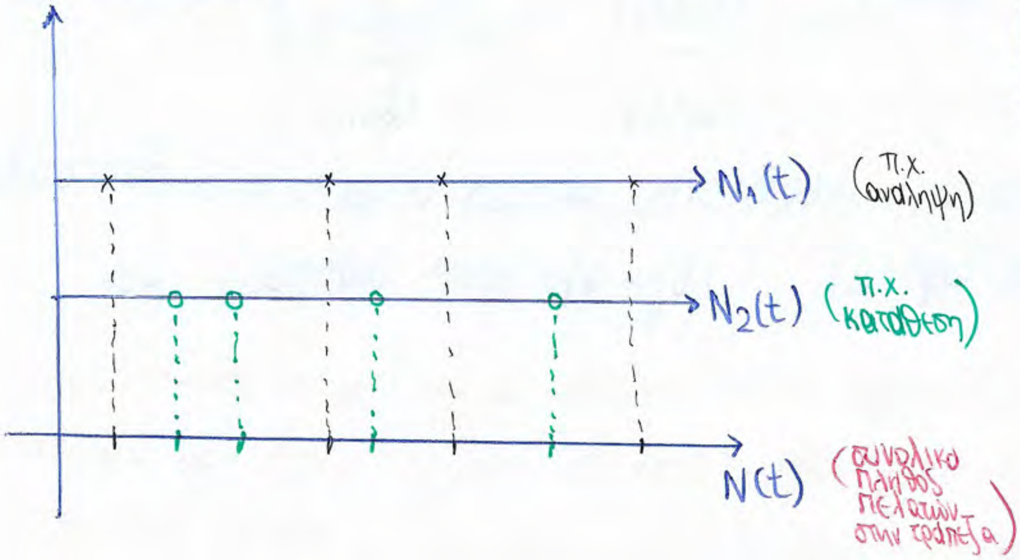
8/4/19
Σ.μ.Ε.Ε.

Μάθημα 12

Ιδιότητες στοχαστικής διαδικασίας Poisson
Υπέρθεση, Διάσπαση
Θεώρημα Campbell

① Ορισμός



Αν $\{N_i(t)\}$ απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες, $i=1,2,\dots$, τότε η $\{N(t)\}$ με $N(t)=\sum_{i=1}^{\infty} N_i(t)$ λέγεται υπέρθεση των $\{N_i(t)\}$.

② Θεώρημα Υπέρθεσης Poisson

Θεώρημα Έστω $\{N_i(t)\}$ στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμό λ_i, $i=1,2,\dots$ ("η $\{N_i(t)\}$ απαριθμεί γεγονότα τύπου i") ανεξάρτητες. Τότε,

(i) η υπέρθεσή τους είναι στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i$.

(ii) Έστω $Z_1, Z_2, \dots$ οι τύποι των γεγονότων της υπέρθεσης. Οι Z_k είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και $Pr[Z_k=i]=\frac{\lambda_i}{\lambda}$, $k=1,2,\dots$, $i=1,2,\dots$ (διαισθητικά λογικό: αν πχ έχουμε 2 τύπους γεγονότων, A και B, και το A συμβαίνει με ρυθμό 1 ενώ το B με ρυθμό 2, τότε στην υπέρθεση είναι λογικό το A να έχει ρυθμό 1/3. Το εντυπωσιακό είναι ότι η υπέρθεση εξακολουθεί να είναι σ.δ. Poisson!)

[Μια "ιδέα" της απόδειξης: το 1ο γεγονός της υπέρθεσης είναι το $\min\left\{\begin{matrix}\text{χρόνος 1ου} \\ \text{γεγον. της } N_1\end{matrix}, \begin{matrix}\text{χρόνος 1ου} \\ \text{γεγον. της } N_2\end{matrix}\right\}$, δηλαδή το min εκθετικών (αφού έχουμε στοχαστικές διαδικασίες Poisson, άρα εκθετική με παράμετρο το άθροισμα των παραμέτρων, ομοίως για το 2ο γεγονός και ούτω καθεξής].

Ιδέα απόδειξης με Ορισμό I (ανανεωτικό) για 2 στοχαστικές διαδικασίες:

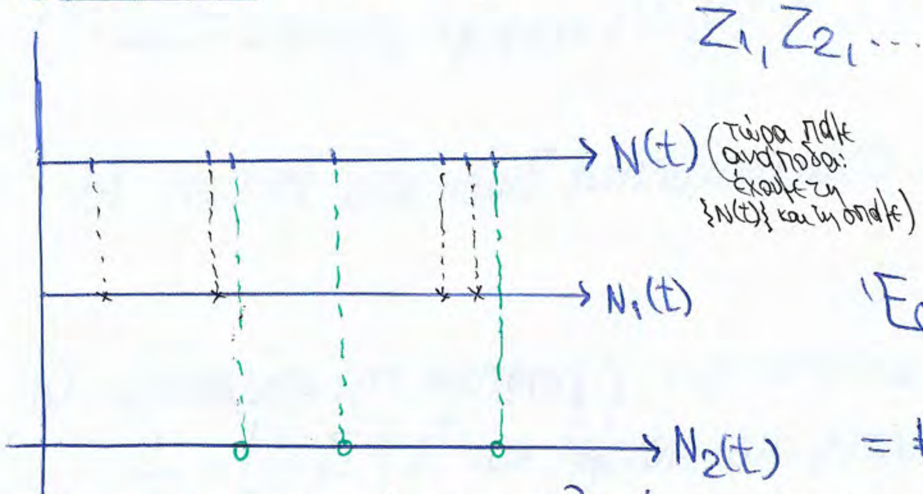
$$\begin{matrix}\text{Χρόνος 1ου} \\ \text{γεγονότος} \\ \text{της υπέρθεσης}\end{matrix} = \min\left(\begin{matrix}\text{χρόνου} \\ \text{1ου γεγονότος} \\ \text{της } \underbrace{\{N_1(t)\}}_{\overset{?}{\sim} Exp(\lambda_1)}\end{matrix}, \begin{matrix}\text{χρόνου} \\ \text{1ου γεγονότος} \\ \text{της } \underbrace{\{N_2(t)\}}_{\overset{?}{\sim} Exp(\lambda_2)}\end{matrix}\right) \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2)$$

Για το 2ο γεγονός της υπέρθεσης, ομοίως είναι το min δύο ανεξάρτητων $Exp(\lambda_1)$ και $Exp(\lambda_2)$ (λόγω αμνήμονης ιδιότητας) κοκ.

[Αν θέλαμε να δουλέψουμε με τον Ορισμό II, θα έπρεπε να δείξουμε ότι το 1ο γεγονός της υπέρθεσης είναι Poisson$((\lambda_1+\lambda_2)t)$ και νδο έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις, τα οποία επίσης βγαίνουν εύκολα διαισθητικά αν σκεφτόμαστε κάθε γεγονός της υπέρθεσης σε σχέση με τα αντίστοιχα των σ.δ. από τις οποίες ξεκινήσαμε.]

③ Ορισμός (Διάσπαση)

Έστω $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια διαδικασία, $Z_1, Z_2, \ldots$ τ.μ. με τιμές στο $\{1,2,\ldots,m\}$ ή $\{1,2,\ldots\}$ (Z_k είναι ο τύπος του k-οστού γεγονότος).



Έστω $N_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1\{Z_k=i\} =$

$=$ # γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$.

Τότε, η $\{(N_1(t), N_2(t), \ldots)\}$ λέγεται διάσπαση της $\{N(t)\}$.

④ Θεώρημα Διάσπασης Poisson

Θεώρημα Έστω $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, $Z_1, Z_2, \dots$, ανεξάρτητες, ισόνομες και $Pr[Z_k = i] = p_i$, $i = 1, 2, \dots$, και $\{(N_1(t), N_2(t), \dots)\}$ διάσπαση της $\{N(t)\}$ σύμφωνα με τις $Z_1, Z_2, \dots$. Τότε,

i) Κάθε $\{N_i(t)\}$ είναι στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) Poisson με ρυθμό λp_i, $i = 1, 2, \dots$, και οι $\{N_i\}$ είναι ανεξάρτητες.

Ιδέα απόδειξης για δύο σ.δ. με Ορισμό Ι (ανανεωτικός):

$$\begin{matrix}\text{Χρόνος } 1^{ου} \\ \text{γεγονότος} \\ \text{στην } \{N_i(t)\}\end{matrix} = \sum_{j=1}^{N} X_j \quad \text{, όπου } X_1, X_2, \dots \sim Exp(\lambda) \; \left(\begin{matrix}\text{ενδιάμεσοι} \\ \text{χρόνοι της } \{N(t)\}\end{matrix}\right)$$

και $N = \#$γεγονότων της $\{N(t)\}$ μέχρι να εμφανιστεί το $1^{ο}$ γεγονός τύπου i, όπου $Pr[N=n] = \underbrace{(1-p_i)^{n-1}}_{\text{θέλουμε } (n-1) \text{ φορές να έρθει κάτι άλλο και τη } n\text{-οστή να έρθει } N_i} \cdot p_i$, $n = 1, 2, \dots$. Από Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής ή Πιθανογεννήτριες Κ.Ο.Κ., βρίσκουμε ότι

$$\begin{matrix}\text{Χρόνος } 1^{ου} \\ \text{γεγονότος} \\ \text{της } \{N_i(t)\}\end{matrix} \sim Exp(\lambda p_i) \quad \left(\begin{matrix}\text{Μάθημα 4,} \\ \text{σελίδα 2}\end{matrix}\right)$$

⑤ Θεώρημα Campbell (υπενθύμιση)

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι γεγονότων, τότε $\underbrace{(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t) = n)}_{\text{δεδομένου του ότι τη στιγμή } t \text{ έχουν γίνει } n \text{ γεγονότα, πότε συνέβηκε το καθένα?}} \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n})$,

όπου $U_{i:i}$ οι διατεταγμένες τ.μ. από n ανεξάρτητες Uniform$([0,t])$.

Παρατηρήσεις: 1] Ο ρυθμός λ δεν παίζει ρόλο στην $(S_1,\dots,S_n | N(t)=n)$ (!)
(επάρκεια τ.μ., βλ. Στατιστική Ι)

2] (σημαντικό!) Πως χρησιμοποιείται το Θ. Campbell?

$$\Pr\left[(S_1,S_2,\dots,S_n)\in A \mid N(t)=n\right] = \Pr\left[(U_{1:n},U_{2:n},\dots,U_{n:n})\in A\right],$$

και έχουμε υπολογίσει ότι $f_{(U_{1:n},\dots,U_{n:n})} = \dfrac{n!}{t^n}$ (πετάμε δηλαδή τη δέσμευση $N(t)=n$).

Για τη μέση τιμή,

$$E\left[f(S_1,\dots,S_n) \mid N(t)=n\right] = E\left[f(U_{1:n},\dots,U_{n:n})\right].$$

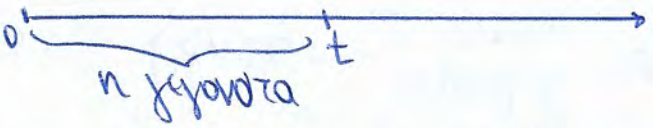
[Η θεωρία των σ.δ. Poisson ολοκληρώνεται εδώ. Τώρα, πολλές ασκήσεις!]

⑥ **Άσκηση** $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson,

$$E[S_k \mid N(t)=n] = ? \quad , n=1,2,3,\dots \quad , k=1,2\dots$$

Λύση: • Αν $k\le n$, από Θεώρημα Campbell έχουμε ότι

$$E[S_k \mid N(t)=n] = E[U_{k:n}] = \frac{kt}{n+1}$$



• Αν $k\ge n+1$, τότε από αμνήμονη ιδιότητα έχουμε ότι

$$E[S_k \mid N(t)=n] = \underbrace{t}_{\text{πόσος χρόνος πέρασε μέχρι το n-οστό}} + \underbrace{\frac{k-n}{\lambda}}_{\text{Εκθετικοί } \frac{1}{\lambda} \text{ χρόνοι από το n-οστό εώς k-οστό}}.$$

⑦ **Άσκηση** $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson, $E[S_k \mid S_n=t]=?$, $n=1,2\dots$, $k=1,2\dots$

Λύση:

Σε επίπεδο ενδεχομένων,

$$\{S_n=t\} = \{N(t-)=n-1,\ N(t)=n\}$$

• Αν $k\le n-1$, τότε $E[S_k \mid S_n=t] \overset{\text{χρειαζόμαστε μόνο την πληροφορία } N(t-)=n-1}{=} E[S_k \mid N(t-)=n-1] = \dfrac{kt}{n}.$

• Αν $k \geq n$, τότε $E[S_k \mid S_n = t] = t + \frac{k-n}{\lambda}$.

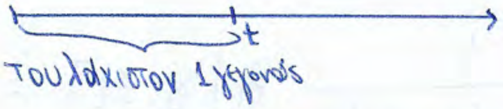
2ος τρόπος: Για $k \leq n-1$, $E[S_k \mid S_n = t] = \dfrac{E[S_k \cdot 1_{\{S_n = t\}}]}{f_{S_n}(t)} =$

$$= \int_0^t u \cdot \frac{f_{S_k,S_n}(u,t)du}{f_{S_n}(t)} \, du = \dots$$

(8) Άσκηση ("Αγαπημένη")

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson, $E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = ?$

Λύση: (Λογικά, εδώ η απάντηση πρέπει να περιέχει το λ: η πληροφορία $N(t) \geq 1$ δεν "επαρκεί" για να "απορροφήσει" το λ)



1ος τρόπος: Θεώρημα Campbell [Όταν θέλουμε υπολογισμό που δεσμεύει σε πληροφορία της $N(t)$, σκεφτόμαστε Θ. Campbell]

$$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] \overset{\substack{\text{θέλουμε ισότητα} \\ \text{στη } N(t) \\ \text{άρα δεσμεύουμε}}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[S_1 \mid \underbrace{N(t)=n, N(t) \geq 1}_{N(t)=n}] \cdot Pr[N(t)=n \mid N(t) \geq 1] \overset{\substack{\text{πετάμε} \\ \text{το } n=0}}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E[S_1 \mid N(t)=n]}_{\overset{\text{Θ. Campbell}}{=} \frac{t}{n+1}} \cdot \frac{Pr[N(t)=n]}{Pr[N(t) \geq 1]} \overset{N(t) \sim Poisson(\lambda t)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{n+1} \cdot \frac{e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}}{1-e^{-\lambda t}} =$$

$$= \frac{t \cdot e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n+1)!} \overset{\substack{\text{φτιάχνουμε} \\ \text{την} \\ \text{εκθετική} \\ \text{σειρά}}}{=} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \overset{k=n+1}{=} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \cdot (e^{\lambda t} - 1 - \lambda t).$$ Τελικά,

$$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = \frac{1-e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})}$$

2ος τρόπος (μόνο με ορισμούς, χωρίς Θ. Campbell):

$$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] \overset{\text{"γέφυρα"}}{=\!=} E[S_1 \mid S_1 \leq t] \overset{\text{τώρα είναι πιθανότητες}}{=\!=}$$

$$= \int_0^\infty u \cdot f_{(S_1 \mid S_1 \leq t)}(u)\, du = \int_0^t u \cdot \frac{f_{S_1}(u)}{Pr[S_1 \leq t]}\, du \overset{S_1 \sim Exp(\lambda)}{=\!=}$$

$$= \int_0^t u \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda u}}{1-e^{-\lambda t}}\, du = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda t}} \int_0^t \underbrace{u \cdot e^{-\lambda u}}_{\text{θυμίζει Gamma}(2,\lambda)}\, du =$$

$$= \frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \int_0^t \frac{\lambda^2}{1!} u^{2-1} \cdot e^{-\lambda u}\, du = \frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \cdot \underbrace{Pr[S_2 \leq t]}_{Pr[N(t) \geq 2]} =$$

$$= \frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \cdot (1-e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}).$$

3ος τρόπος (ωραία έμπνευση: "Αν μπορείς, αναζήτησε την ευκολία") :

$$E[S_1] = Pr[N(t)=0] \cdot E[S_1 \mid N(t)=0] + Pr[N(t) \geq 1] \cdot E[S_1 \mid N(t) \geq 1]$$

$$\xRightarrow[N(t) \sim Poisson(\lambda t)]{S_1 \sim Exp(\lambda)} \frac{1}{\lambda} = e^{-\lambda t} \cdot \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) + (1-e^{-\lambda t}) \cdot E[S_1 \mid N(t) \geq 1] \Rightarrow$$

$$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = \frac{1-e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda \cdot (1-e^{-\lambda t})}.$$

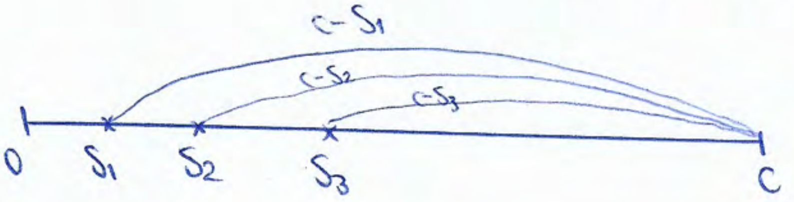
(9) Άσκηση

λ πελάτες/λεπτό

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson αφίξεων πελατών σε σταθμό μετρό με ρυθμό λ. Οι συρμοί περνάνε κάθε c λεπτά.

Μέσος αριθμός χαμένων λεπτών αναμονής μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων συρμών $= ?$

Λύση: Θέλουμε την $E\Big[\sum_{i=1}^{N(c)} \underbrace{(c-S_i)}_{\text{χρόνος αναμονής } i\text{-οστού πελάτη}}\Big]$ τυχαίο άθροισμα, άρα ΘΔΜΤ



$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\sum_{i=1}^{N(c)} (c-S_i) \,\Big|\, N(c)=n\Big]\cdot \Pr[N(c)=n]$$

εδώ δεν έχουμε ανεξαρτησία για να διώξουμε τη δέσμευση

$$\overset{\text{Θ. Campbell}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E\Big[\sum_{i=1}^{n}(c-U_{i:n})\Big]\cdot \Pr[N(c)=n]$$

, όπου $U_{i:n}$ οι διατεταγμένες τ.μ. από n ομοιόμορφες στο $[0,c]$, άρα

$$E\Big[\sum_{i=1}^{N(c)}(c-S_i)\Big] = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(nc - \sum_{i=1}^{n}\frac{ic}{n+1}\Big)\cdot \Pr[N(c)=n] \quad \overset{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(nc - \frac{nc}{2}\Big)\Pr[N(c)=n] = \frac{c}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot \Pr[N(c)=n] = \frac{c}{2}\cdot E[N(c)] =$$

$$= \frac{c}{2}\cdot \lambda c = \frac{\lambda c^2}{2}.$$

$\Big[$ Διαισθητικά, $E = \underbrace{\lambda c}_{\#\text{πελατών}}\cdot \underbrace{\frac{c}{2}}_{\text{μέσος χρόνος αναμονής}} = \frac{\lambda c^2}{2}\Big]$