4/3/19 Μάθημα 4

Σ.μ.Ε.Ε.

# Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes Εκθετική κατανομή

## ① Υπενθυμίσεις

1| Μετασχηματισμός L-S μίας συνάρτησης $\varphi$: $\tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\varphi(x) = \sum_{x:\ \varphi(x)\ \text{ασυνεχής}} e^{-sx}\left(\varphi(x) - \varphi(x^-)\right) + \int_0^\infty e^{-sx} \varphi'(x)\,dx$

2| Αντιστοιχίες $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(s)$.

## ② Αντιστροφή μετασχηματισμών

$\tilde{\varphi}(s) \longrightarrow \varphi(x)$, $\tilde{F}_X(s) \longrightarrow F_X(x)$

Κυριότερη περίπτωση: $\tilde{F}_X(s)$ ρητή συνάρτηση (όπως στις πιθανογ., αλλά με μετασχηματισμό L-S στο τέλος αντί για γεωμετρική σειρά)

## ③ Παράδειγμα 1: Άθροισμα ανεξάρτητων εκθετικών (Exp)

Αν $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$, $\lambda \neq \mu$, $X, Y$ ανεξάρτητες, $Z = X + Y$, τότε $Z \sim ?$ (ή, ισοδύναμα, $F_Z(x) = Pr[Z \leq x] = ?$)

Λύση: $X, Y$ ανεξάρτητες, $Z = X+Y \Rightarrow \tilde{F}_Z(s) = \tilde{F}_X(s) \cdot \tilde{F}_Y(s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{F}_Z(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s} \overset{\text{ο παρον/στής}}{\underset{\text{είναι ήδη παραγοντοποιημένος}}{=}} \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{\mu+s}, \text{ όπου}$$

$$A + \frac{B}{\mu+s}(\lambda+s) = \frac{\lambda\mu}{\mu+s} \overset{s=-\lambda}{\Longrightarrow} A = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} \text{ και, ομοίως, } B = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}.$$

$$\text{Άρα, } \tilde{F}_Z(s) = \frac{\mu}{\mu-\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+s}}_{\substack{\text{μετασχ. L-S} \\ \text{της } Exp(\lambda)}} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \cdot \underbrace{\frac{\mu}{\mu+s}}_{\substack{\text{μετασχ. L-S} \\ \text{της } Exp(\mu)}} \xrightarrow[\text{μετασχ. L-S είναι γραμμικός}]{\text{χρησιμοποιούμε ότι αν ο μετασχ. L-S είναι γραμμικός, τότε και ο αντίστροφος}}$$

$$F_Z(x) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\cdot\left(1-e^{-\lambda x}\right) + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\cdot\left(1-e^{-\mu x}\right), \quad x \geq 0$$

[προσοχή: δεν πήραμε κάποια Gamma κατανομή, γιατί οι δύο εκθετικές δεν ήταν ισόνομες!]

## ④ Παράδειγμα 2: Γεωμετρικό άθροισμα ανεξάρτητων Exp

[διαισθητικά: αν ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη είναι εκθετικός και μετά από μία εξυπηρέτηση την επαναλαμβάνει με πιθανότητα P, τι κατανομή ακολουθεί ο συνολικός χρόνος $S_N$?]

$X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$, ανεξάρτητες, N ανεξάρτητη των $X_i$, $i=1,2,\ldots$,

$\Pr[N=n] = (1-p)^{n-1}\cdot p$, $n=1,2,\ldots$, $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \;;$

N → τυχαία μεταβλητή, άρα $S_N$ τυχαίο άθροισμα

Λύση: $\tilde{F}_{X_i}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$, $P_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\cdot p\cdot z^n = \frac{pz}{1-(1-p)z}$, άρα

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N\left(\tilde{F}_X(s)\right) = \frac{p\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-(1-p)\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda p}{\lambda+s-(1-p)\lambda} = \frac{\lambda p}{s+\lambda p}$$

$\Longrightarrow S_N \sim Exp(\lambda p)$.

## ⑤ Παράδειγμα 3: Μέση τιμή και Διασπορά τυχαιοαθροίσματος ανεξάρτητων και ισόνομων

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., $E[X_i]=\mu_X$, $Var[X_i]=\sigma_X^2<\infty$, N ανεξάρτητη των $X_i$, $E[N]=\mu_N$, $Var[N]=\sigma_N^2<\infty$, $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$, $\mu=E[S_N]$, $\sigma^2=Var[S_N]=\;;$

Λύση: Βασική σχέση: $\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)$. Για τη μέση τιμή $E[S_N]$, έχουμε: $\tilde{F}'_{S_N}(s) = P'_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)\cdot\tilde{F}'_X(s)$ (1). Για $s=0$, η (1) δίνει:

$$\tilde{F}'_{S_N}(0) = P'_N\left(\tilde{F}_X(0)\right)\cdot\tilde{F}'_X(0) = P'_N(1)\cdot F'_X(0) \Longrightarrow$$

$$-E[S_N] = E[N]\cdot\left(-E[X]\right) \Rightarrow \mu = \mu_N\cdot\mu_X$$

[το είχαμε δει και με το ΘΔΜΤ]

Παραγωγίζοντας 2η φορά την (1), έχουμε:

$$\tilde{F}''_{S_N}(s) = P''_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)\cdot\left(\tilde{F}'_X(s)\right)^2 + P'_N\left(\tilde{F}_X(s)\right)\cdot\tilde{F}''_X(s) \qquad (2)$$

Για $s=0$, η (2) δίνει: $\tilde{F}''_{S_N}(0) = P''_N(\tilde{F}_X(0)) \cdot (\tilde{F}'_X(0))^2 + P'_N(\tilde{F}_X(0)) \cdot \tilde{F}''_X(0) \Rightarrow$

$E[S_N^2] = E[N(N-1)] \cdot (E[X])^2 + E[N] \cdot E[X^2]$, άρα

$$Var[S_N] = E[S_N^2] - (E[S_N])^2 = E[N(N-1)] \cdot (E[X])^2 + E[N] \cdot E[X^2] - (E[N])^2 \cdot (E[X])^2 \Rightarrow$$

$$Var[S_N] = (E[N^2] - (E[N])^2)(E[X])^2 + E[N] \cdot (E[X^2] - (E[X])^2) \Rightarrow$$

$\sigma^2 = \sigma_N^2 \cdot \mu_X^2 + \mu_N \cdot \sigma_X^2$. διαισθητικά: [όταν έχεις ένα τυχαίο άθροισμα, η διασπορά του εκφράζει την απόκλιση από τη μέση τιμή, η οποία μπορεί να οφείλεται είτε σε αποκλίσεις των $X_i$ είτε στην τυχαιότητα του $N$, από όπου και έπεται ο τύπος $\sigma_N^2 \mu_X^2 + \mu_N \sigma_X^2$]

(Εδώ ολοκληρώνονται οι μετασχηματισμοί).

---

## ⑥ Εκθετική κατανομή

Μοντέλο: $X$ χρόνος (ζωής) με την αμνήμονη ιδιότητα ("οποιαδήποτε χρονική στιγμή, το πόσος χρόνος έχει περάσει δε μου λέει τίποτα για το πόσος χρόνος απομένει") ⟶

⟶ $X \geq 0$, συνεχής τ.μ. με την ιδιότητα $P(X-s>t \mid X>s) = P(X>t)$.

Η μοναδική κατανομή με αυτές τις ιδιότητες είναι η Exp. Πράγματι, έστω $g(t) = Pr[X>t]$ η συνάρτηση επιβίωσης της $X$, $t>0$. Από τις συνθήκες του μοντέλου, παίρνουμε ότι $g(0) = P(X>0) = P(X>s \mid X>s) = 1$ (ή, πιο απλά, $X \geq 0$), $g(t)$ παραγωγίσιμη, $g(t+s) = Pr[X>s+t] = \frac{Pr[X>s+t]}{Pr[X>s]} \cdot Pr[X>s] =$

$= Pr[X>s+t \mid X>s] \cdot Pr[X>s] \overset{\text{αμνήμονη ιδιότητα}}{=\!=} g(t) \cdot g(s)$. Τότε, επαγωγικά βρίσκουμε ότι $g(t_1+t_2+\dots+t_n) = g(t_1) \cdot g(t_2) \cdot \ldots \cdot g(t_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1, \dots, t_n > 0$, άρα

$g(1) = g\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right) = (g(1))^{1/n}$. Αν τώρα $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $g\left(\frac{m}{n}\right) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m\text{-φορές}}\Big) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = (g(1))^{m/n}$, άρα για $q \in \mathbb{Q}$, $q \geq 0$, ισχύει ότι

$g(q) = (g(1))^q$. Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, τότε $\exists (q_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}: q_n \to x$. Από αρχή της μεταφοράς $g(x) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = \lim_{n\to\infty} (g(1))^{q_n} \overset{\text{συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης}}{=} (g(1))^{\lim_{n\to\infty} q_n} = (g(1))^x =$

$= e^{\log(g(1))x} = e^{-\lambda x}$, με $\lambda = -\log g(1) > 0$ (αφού $g(1) \in (0,1)$). Δηλαδή,

$g(t) = e^{-\lambda t}$, $t > 0$, οπότε $P_r[X \leq t] = 1 - g(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0 \Rightarrow X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.

Έχουμε, λοιπόν, ότι $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (σ.κ.),

$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (σ.π.π.), $\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$,

$Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$, $E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$ (εύκολες οι ροπές της εκθετικής)

## 7 Ιδιότητες της Exp

1) $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow P_r[X > s+t \mid X > s] = P_r[X > t]$ (αμνήμονη ιδιότητα)

2) $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, $a > 0 \Rightarrow aX \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ (ιδιότητα κλίμακας)

[διαισθητικά λόγια: η αμνήμονη ιδιότητα είναι ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό, δε χάνεται αν αλλάξουμε τη μονάδα μέτρησης. Αλλάζει όμως η μέση τιμή (πχ αν τις ώρες τις βλέπουμε ως λεπτά). Άρα ξέρουμε ότι έχουμε Exp, αλλά με μέση τιμή $a/\lambda$, οπότε $\mathcal{E}xp(\lambda/a)$]

3) $\left.\begin{array}{l} X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \\ Y \geq 0, \text{ ανεξάρτητη της } X \end{array}\right\} \Rightarrow P_r[X > Y + t \mid X > Y] = P_r[X > t]$ (ισχυρή αμνήμων)

4) • $\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ανεξάρτητες} \\ X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda_i), \ i = 1, 2, \dots, n \end{array}\right\} \Rightarrow \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}xp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$ (ιδιότητα minimum)

[διαισθητικά: ας πούμε ότι περιμένουμε στη στάση το 608, το 250, το 221 κλπ. Τότε, ο min χρόνος συνεχίζει να έχει την αμνήμονη ιδιότητα (να δούμε τους χρόνους αναμονής ως λόγους τερματισμού), άρα min ~ Exp. (η παράμετρος $\Sigma\lambda_i$ δεν είναι διαισθητικά προφανής)]

• $\{N = i\} = \{\min(X_1, \dots, X_n) = X_i\} \Rightarrow P_r[N = i] = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

η τ.μ. N μας δείχνει πού πιάστηκε το minimum

• $N$, $\min(X_1,\dots,X_n)$ ανεξάρτητες τ.μ. (!) [δηλαδή το πότε θα λήξει ο χρόνος είναι ανεξάρτητο με το ποιο έληξε ο χρόνος. Αν το δούμε όπως πριν με τα λεωφορεία: Το 608 περνάει κάθε 5' ενώ το 221 κάθε 40' (++). Αν μας πει κάποιος ότι μόλις πέρασε ένα, τότε αυτή η πληροφορία δε μας λέει τίποτα για το ποιο ήταν, κι ας ξέρουμε ότι το ένα περνάει πολύ πιο συχνά από το άλλο(!!)]

5] $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$, ανεξάρτητες $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n,\lambda) \overset{n\in\mathbb{N}}{=} Erlang(n,\lambda)$

(ιδιότητα του αθροίσματος)

6] $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες, $X_i \sim Exp(\lambda)$, $N$ ανεξάρτητη των $X_i$, $Pr[N=n]=(1-p)^{n-1}p$, $n=1,2\dots$ $\Bigg\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i \sim Exp(\lambda p)$ (ιδιότητα του τυχαίου αθροίσματος)

7] $X_1, X_2, \dots, X_n \sim Exp(\lambda)$ ανεξάρτητες, $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \dots \le X_{n:n}$ οι αντίστοιχοι διατεταγμένοι χρόνοι: (ιδιότητα spacings)


$D_{i:n}$: i-οστό spacing. Τότε,

$D_{1:n}, D_{2:n}, \dots, D_{n:n}$ ανεξάρτητες και $D_{i:n} \sim Exp((n-i+\lambda)\lambda)$.

[διαισθητικά: βλέπω το $D_{1:n}$ ως τον χρόνο μέχρι να χτυπήσει το 1ο ξυπνητήρι, άρα min $n$ εκθετικών $Exp(\lambda)$, οπότε $D_{1:n} \sim Exp(n\lambda)$. Μόλις χτυπήσει το 1ο, χρησιμοποιώ την αμνήμονη ιδιότητα και για το $D_{2:n}$ έχουμε το min $n-1$ $Exp(\lambda)$, άρα $D_{2:n} \sim Exp((n-1)\lambda)$ κ.ο.κ.]

## (8) Αποδείξεις / Αιτιολογήσεις

1] Αυτή τη συνθήκη θεωρήσαμε εξ αρχής για να βγάλουμε την Exp (άρα "ορισμός").

2] $F_{aX}(t) = Pr[aX \le t] \overset{a>0}{=} Pr\left[X \le \frac{t}{a}\right] = F_X\left(\frac{t}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{t}{a}} \Rightarrow$

$\Rightarrow aX \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$.

3] $Pr[X>Y+t \mid X>Y] = \dfrac{Pr[X>Y+t, X>Y]}{Pr[X>Y]} \overset{\{X>Y+t\} \subseteq \{X>Y\}}{=\!=\!=} \dfrac{Pr[X>Y+t]}{Pr[X>Y]} =$

Θ.Ο.Π. στη συνεχή περίπτωση

$$\frac{\int_0^\infty e^{-\lambda(y+t)} f_Y(y)\,dy}{\int_0^\infty e^{-\lambda y}\, f_Y(y)\,dy} = e^{-\lambda t} = Pr[X>t]$$

[Θ.Ο.Π. στη συνεχή: $Pr[X>Y] = \int_0^\infty Pr[X>y \mid Y=y]\cdot f_Y(y)\,dy$ ⇝ βλέπουμε το ολοκλήρωμα ως άθροισμα στο συνεχές, άρα είναι το ίδιο με το Θ.Ο.Π. στη διακριτή περίπτωση]

4] Θα δείξουμε την ιδιότητα minimum:

$$Pr[\min(X_1,X_2,\dots,X_n)\le t] = 1 - Pr[\min(X_1,X_2,\dots,X_n) > t] =$$

$$= 1 - Pr[X_1>t, X_2>t, \dots, X_n>t] \overset{X_i \text{ ανεξ.}}{=} 1 - Pr[X_1>t]\cdot Pr[X_2>t]\cdot\ldots\cdot Pr[X_n>t] =$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 t}\cdot e^{-\lambda_2 t}\cdot\ldots\cdot e^{-\lambda_n t} = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)t} \Rightarrow \min(X_1,X_2,\dots,X_n) \sim Exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

$$Pr[N=i] = Pr[X_i<X_1, X_i<X_2, \dots, X_i<X_n] \overset{\substack{\text{Θ.Ο.Π.}\\ \text{δεσμεύοντας στις τιμές της συνεχούς τ.μ. } X_i}}{=}$$

$$= \int_0^\infty Pr[\underbrace{X_1>t, X_2>t, \dots, X_n>t}_{\text{εδώ δεν υπάρχει η } X_i\text{, άρα } n-1 \text{ όροι}}]\, f_{X_i}(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\sum_{j\ne i}\lambda_j t}\cdot \lambda_i e^{-\lambda_i t}\,dt =$$

$$= \lambda_i \int_0^\infty e^{-\sum_{j=1}^n \lambda_j t}\,dt = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j t}.$$

5] Ορισμός της Gamma.

6] Έχει γίνει.

κλπ...