1/6/2016

Ασκήσεις

Φυλ 8/Ασκ 1

$p_0, p_1 =$; σε ένα $M|GI|1|1$ λ: ρυθμός αφίξεων

b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

Ν. Little: $E[Q] = \lambda\, E[S]$

#πελ. στο σύστημα — ρυθμός αφίξεων — χρόνος παραμονής στο σύστημα

δεδομένου ότι είναι άδειο θα περιμένει b

$\Rightarrow 0 \cdot p_0 + 1 p_1 = \lambda\,(r_0 b + r_1 \cdot 0)$ δεδομένου ότι θα βρει κάποιον θα περιμένει 0, αφού θα φύγει

r_0: πιθανότητα τη στιγμή άφιξης να υπάρχουν 0 πελάτες

$\Rightarrow p_1 = \lambda r_0 b$

PASTA $(r_n) = (p_n)$

$\Rightarrow p_1 = \lambda p_0 b$ (1)

Από εξίσωση κανονικοποίησης: $p_0 + p_1 = 1$ (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ $p_0 = \dfrac{1}{1+\lambda b}$

$$p_1 = \frac{\lambda b}{1+\lambda b}$$

Εναλλακτικά, μπορώ να εφαρμόσω το Νόμο του Little αναφερόμενη μόνο στους πελάτες που τελικά εισέρχονται.

Τότε, $E[Q] = \lambda^* E[S^*]$

λ^*: ρυθμός πελατών που μπαίνουν στο σύστημα — $E[S^*]$: χρόνος παραμονής αυτών που μπαίνουν

$\lambda^* = \lambda r_0$ $E[S^*] = b$

Φυλ 8/Ασκ 2

$E[Q] = ;$

$GI/GI/\infty$ ουρά

a. Μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων

b. Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

Ν. Little: $E[Q] = \lambda E[S] = \frac{1}{a} \cdot b$

Εφαρμογή

$M/M/\infty$ ουρά.

- Poisson σδ αφίξεων με ρυθμό λ
- $Exp(\mu)$ χρ εξυπ
- ∞ υπηρέτες

$p_n = ;$ $\quad E[Q] = ;$

$r_n = ;$ $\quad E[S] = ;$

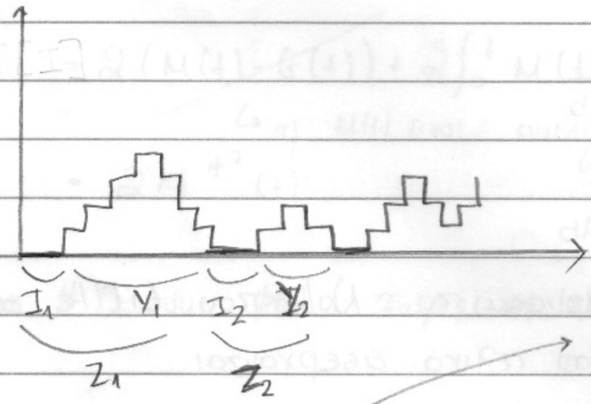
$d_n = ;$ $\quad E[I] = ;$

$F_S(x) = ;$ $\quad E[Y] = ;$

$E[Z] = ;$

Από το $GI/GI/\infty$ έχουμε $E[Q] = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$

$E[S] = \frac{1}{\mu}$



Αυτό ισχύει για Poisson αλλιώς έχω πρόβλημα γιατί δεν έχω αμνήμονη

$E[I] = \frac{1}{\lambda}$ (Μέση τιμή ενός ενδιάμεσου χρόνου αφίξεων)

Ισχύει όταν έχω αμνήμονη κατανομή (πχ Poisson)

$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \leftarrow 1/\lambda \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda p_0}$

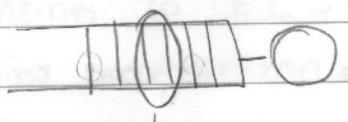
$E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1 - p_0}{\lambda p_0}$

$F_S(x) = F_X(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad , x>0$

$p_n = d_n = r_n \quad \forall n$

PASTA Μεμονωμένες μεταβάσεις

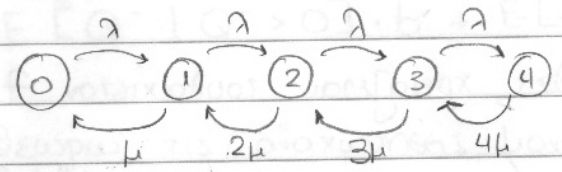
Για τον υπολογισμό της p_n βλέπουμε το σύστημα την n-οστή θέση



Χρόνος $n \to n-1$

Χρόνος ζωής της $1^{ης}$ εξυπηρέτησης:

$= \min(\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_n}_{\text{ανεξ. } exp(\mu)}) \sim Exp(n\mu)$



N. Little για το σύστημα "κατάσταση n":

πελ στην n = ρυθμός αφίξεων στην n × μέσος χρόνος παραμονής στην n.

$n=0: \quad p_0 = \mu p_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \Rightarrow p_1 = \rho \cdot p_0$

$n \geq 1: \quad p_n = (\lambda \cdot p_{n-1} + (n+1)\mu \cdot p_{n+1}) \cdot \frac{1}{\lambda + n\mu}$

$\Rightarrow (\lambda + n\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1}$

$\overset{\div \mu}{\Rightarrow} (\rho + n) p_n = \rho \cdot p_{n-1} + (n+1) p_{n+1}$

$\Rightarrow$

Επομένως,

$p_1 = \rho p_0$

$(\rho + \cancel{1}) p_1 = \cancel{\rho p_0} + 2p_2$

$(\rho + \cancel{2}) \cancel{p_2} = \cancel{\rho p_1} + 3p_3$

$(\rho + \cancel{3}) \cancel{p_3} = \cancel{\rho p_2} + 4p_4$

$\vdots$

Άρα, $p_1 = \rho p_0$

$p_2 = \frac{\rho}{2} p_1$

$p_3 = \frac{\rho}{3} p_2$

Οπότε, $p_n = \frac{\rho}{n} \cdot \frac{\rho}{n-1} \cdot \frac{\rho}{n-2} \cdots \frac{\rho}{1} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0$

Επίσης, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = 1 \Rightarrow p_0 \cdot e^{\rho} = 1 \Rightarrow p_0 = e^{-\rho}$

$\Rightarrow p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \; n=0,1,\dots$ # πελ στην ουρά $\sim$ Poisson(ρ)

Φυλ 8/Ασκ 3

$M|M|c$

λ = 5πελ/ωρες

b = 78λεπτά

Ελαχιστο c ώστε ευσταθές;

Ελαχιστο c ωστε πιθ. απασχ. υπηρ $\leq 80\%$

• Σε σύστημα $GI|GI|c$ όχι ντετερμινιστικα η αναγκαια και ικανή συνθήκη ευσταθειας ειναι: $\rho < c$

$\rho = \lambda b = 5 \cdot 1,3 = 6,5$

Αρα για να ειναι ευσταθες χρειαζεται τουλαχιστον 7 υπηρετες

πιθ. απασχ υπηρετη σε $GI|GI|c$ $= \dfrac{\rho}{c}$ (διοτι # απασχ υπηρ ∼ Bin(# διαθ. υπηρ, πιθ απασχ υπηρετη). Άρα, $E[\#\ ^{\text{απασχ}}_{\text{υπηρ}}] = c \cdot$ πιθ. απασχ. υπηρετη)

$\leq 0,8 \Rightarrow c \geq \dfrac{6,5}{0,8} \Rightarrow c \geq 8,1$

Αρα τουλαχιστον 9

Φυλ 8/Ασκ 4

$E[Q] = ;$

$M|GI|1$

λ: ρυθμος αφιξης

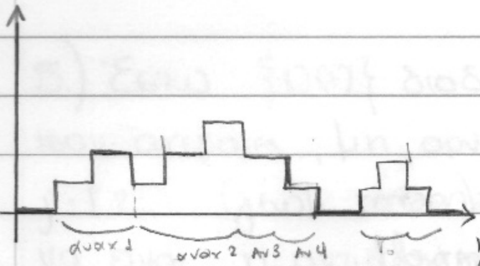
b: μεσος χρονος εξυπ.

σ: τυπική αποκλιση χρ. εξυπ.

N. Little: $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

Δεσμευοντας στον αριθμο πελατων που βρισκει ενας πελατης κατα την αφιξη του, Q^- εχω:

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S \mid Q^- = n] \, \underbrace{P[Q^- = n]}_{r_n \overset{\text{PASTA}}{=} p_n}$$



(επειδή είναι το $r_0 = p_0$ και $p_0 = 1-\rho$ σε GI/G/1)

Έχω, $E[S] = \underbrace{P(Q^- = 0)}_{1-\rho} \underbrace{E[S \mid Q^- = 0]}_{b} + \underbrace{P(Q^- > 0)}_{\rho} E[S \mid Q^- > 0]$

Λείπει το $E[S \mid Q^- > 0]$ μπαίνει μέσα σε χρόνο συνεχούς λειτουργίας

Για έναν πελάτη που φτάνει στη διάρκεια ενός χρόνου συνεχούς λειτουργίας ο χρόνος παραμονής είναι:

$$E[Q^- \mid Q^- > 0] \cdot b + E[\text{Υπολειπόμενος χρόνος εξυπ} \mid Q^- > 0]$$

Αν θεωρώ τις αναχωρήσεις μόνο σε περίοδο συνεχούς λειτ. οι στιγμές των αναχ είναι ανανεωτική σδ. Οι στιγμές των αφίξεων είναι Poisson(λ)

Από ιδιότητα PASTA:

$$E[\text{Υπολειπ. χρόνος εξυπ} \mid Q^- > 0] = E[\text{Υπολειπ χρ. εξυπ σε τυχαία χρ. στιγμή χρόνου συνεχ λειτ}]$$

$$= E\left[\begin{matrix}\text{Υπολειπ. χρόνος ανανέωσης στην Ανον. Διαδ}\\ \text{με ενδιάμ. χρόνους τους χρόν εξυπ}\end{matrix}\right] = \frac{b^2+\sigma^2}{2b} \quad \left(\begin{matrix}\text{από θεωρία, όπου}\\ \tau = b\end{matrix}\right)$$

Οπότε, $$E[S] = (1-\rho)b + \rho\left(E[Q^- \mid Q^- > 0] \cdot b + \frac{b^2+\sigma^2}{2b}\right)$$

$$= (1-\rho)b + \rho\frac{b^2+\sigma^2}{2b} + \underbrace{E[Q^- \mathbb{1}(Q^- > 0)]}_{Q^- \overset{PASTA}{=} Q} \cdot b$$

Άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} E[Q] = \lambda E[S] \\ E[S] = (1-\rho)b + \rho\dfrac{b^2+\sigma^2}{2b} + bE[Q] \end{cases}$$

e-class σελίδα ακολούθ- Μπουρνέτο υπάρχει λύση η 5η

Poisson - 3 ορισμους
- Ιδιοτητα υπερθεσης + διασπασης
- Διατεταγμενες τ.μ. - Compell
- Μη ομογενης & συνθετη

Αναν. Θεωρια - Υπολογ. αναν. συναρτησης (3 τροποι)
- Στοιχ. Αναν. θεωρ. με αλαβες *
- Αναν. εξισωση
- Βασικο αναν. θεωρημα

Ουρές: - Ευσταθεια
- Little
- Μεταβασεις
- Pasta