27/5/2016

Φυλ 6/Ασκ 1

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με ενδιάμ. χρόνους $\sim U([0,1])$

Νδο: $M(t) = E[N(t)] = e^t - 1$, $0 \le t \le 1$.

Υπενθύμιση: Υπάρχουν τουλάχιστον 3 τρόποι για τον υπολογισμό αναν. συνάρτησης

1^{os}: $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$ (βολεύει στην εκθετική όχι εδώ)

2^{os}: $\tilde{M}(s) = \dfrac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$ και μετά αντιστροφή

3^{os}: $M(t) = E[N(t)] = \int_0^{\infty} E[N(t) | X_1 = x] dG(x) = \cancel{\int_t^{\infty} 0 \, dG(x)} + \int_0^t (1 + M(t-x)) dG(x)$

$= G(x) + \int_0^t M(t-x) dG(x)$ και μετά παραγώγιση και λύση διαφορ. εξίσ.

Εδώ $G(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & 0 < t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

Αν ακολουθούσα τον 2^o τρόπο: $\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dG t = \int_0^1 e^{-st} dt = \left[\dfrac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 = \dfrac{1-e^{-s}}{s}$

Βγαίνει εκθετική συνάρτηση που εγώ δεν έχω μάθει να το αντιστρέφω. Μόνο με ρητές έχουμε μάθει

Με τον 3^o τρόπο (Αναν. Εξίσ.):

$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-x) dG(x) = t + \int_0^t M(t-x) dx$, $0 \le t \le 1$

$= t + \int_0^t M(u) du$

$\overset{d/dt}{\Rightarrow} M'(t) = 1 + M(t) \Rightarrow M'(t) - M(t) = 1 \Rightarrow e^{-t} M'(t) - e^{-t} M(t) = e^{-t}$

$\Rightarrow \dfrac{d(e^{-t} M(t))}{dt} = e^{-t}$, $0 \le t \le 1$

Ολοκληρώνοντας έχω: $e^{-t} M(t) - \cancel{e^{-0} M(0)}^{\,0} = \int_0^t e^{-u} du$

$\Rightarrow e^{-t} M(t) = 1 - e^{-t} \Rightarrow M(t) = e^t - 1$, $0 \le t \le 1$

Φυλ 6/Ασκ 2

$\{N(t)\}$ ανάν. διαδ. με ενδιάμ. χρόνους με σ.π.π. $g(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$

$M(t) = E[N(t)] = ;$

Με τον 2° τρόπο (μετασχ LS)

$$g(t) = \ldots \Rightarrow \tilde{G}(s) = \frac{p\lambda}{\lambda+s} + \frac{(1-p)\mu}{\mu+s} = \frac{p\lambda(\mu+s) + (1-p)\mu(\lambda+s)}{(\lambda+s)(\mu+s)}$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} = \frac{(p\lambda + (1-p)\mu)s + p\lambda\mu + (1-p)\mu\lambda}{s^2 + (\lambda+\mu)s + \cancel{\lambda\mu} - (p\lambda + (1-p)\mu)s - \cancel{\lambda\mu}}$$

$$= \frac{(p\lambda + (1-p)\mu)s + \lambda\mu}{s(s+\lambda+\mu-p\lambda-(1-p)\mu)} = \frac{(p\lambda + (1-p)\mu)s + \lambda\mu}{s(s+(1-p)\lambda+p\mu)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+(1-p)\lambda+p\mu}$$

Βρίσκω τα A, B και τελικά $\tilde{M}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(1-p)\lambda+p\mu} \cdot \frac{(1-p)\lambda+p\mu}{(1-p)\lambda+p\mu}$

$$\Downarrow$$

$$M(t) = At + \frac{B}{(1-p)\lambda+p\mu} \cdot \left(1 - e^{-((1-p)\lambda+p\mu)t}\right)$$

Φυλ 6/Ασκ 3

$\{N(t)\}$ ανάν. διαδ. με ενδιάμεσους χρόνους Gamma(r,λ) → Erlang

Νδο: $M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{1 - \sum_{j=0}^{nr-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\right\}}_{P(L(t) \geq nr) \text{ όπου } \{L(t)\} \text{ σδ Poisson με ρυθμό } \lambda}$, $t \geq 0$

Ξέρουμε ότι $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$

Όμως $G^{*n}(t) = P(\underset{\text{n-οστό γεγ. της } \{N(t)\}}{\underset{\uparrow}{S_n}} \leq t)$

Όμως, $S_n \sim Erlang(nr, \lambda)$

Οπότε $P(S_n \le t) = P($το nr-οστό γεγ σε σ.δ Poisson ρυθμού λ συμβαίνει μέχρι τη στιγμή $t)$

$= P(L(t) \ge nr)$

Φυλ 6/Ασκ 4

Μηχαν με χρόνο ζωής $\sim Exp(\lambda)$

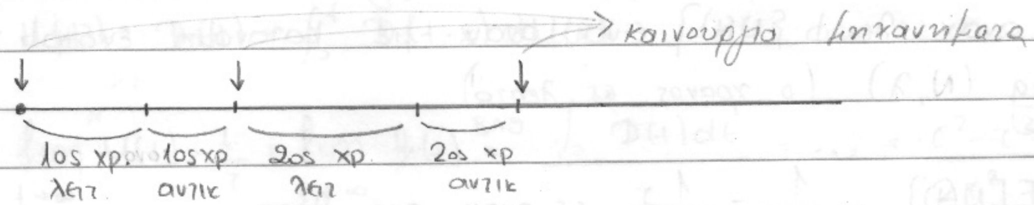
Πολιτική αντικατάστασης:

Αντικαθίσταται στον $\min(\underbrace{X}_{exp(\lambda)}, \underbrace{T}_{\text{αριθμός}})$

Χρόνος αντικατάστασης $Y \sim Erlang(r, \mu)$

$N(t) = \#$ μηχαν. που έχουν χρησιμοποιηθεί ως τη στιγμή t

$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = ;$



$\{N(t)\}$ αναν. διαδ

$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[\text{ενδ. χρόνοι της } \{N(t)\}]}$

$\tau = E[\min(X,T)] + E[Y]$

$E[\min(X,T)] = \int_0^\infty (1 - F_{\min(X,T)}(t))\,dt = \int_0^\infty P(\min(X,T) > t)\,dt$

$= \int_0^T P(\min(X,T) > t)\,dt + \int_T^\infty P(\min(X,T) > t)\,dt$

$= \int_0^T P(X > t, \underbrace{\cancel{T > t}}_{\text{ισχύει ούτως ή άλλως αφού } 0<t<T})\,dt + \int_T^\infty \cancel{P(X>t, T>t)}^{\,0}\,dt$ ↳ δεν ισχύει άρα 0

$$= \int_0^T e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}$$

Άρα, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \dfrac{1}{\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + r\mu}$

Φυλ 6/Ασκ 5

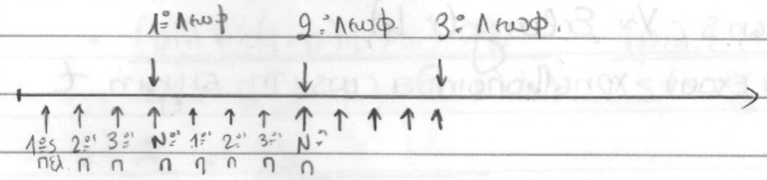
Λεωφ. αναχωρουν μολις γεμισουν

Χωρητικ. λεωφ. = N επιβ.

Αφιξεις πελ. συμφ με σ.δ. Poisson με ρυθμο λ πελ/λεπτό

Μακροπρόθεσμος μεσος αριθμός

X = αναχωρ. λεωφορειων ανά ώρα = ;



Διαδ αναχ λεωφ $\{N(t)\}$ είναι αναν. με κατανομη ενδιαμ. χρονου Erlang (N, λ) (ο χρόνος σε λεπτά)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Στοιχ} \\ \text{Αναν Θεωρ.}}}{=} \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N\lambda}$$ σε αναχ ανά λεπτό

Άρα $X = \frac{60}{N\lambda}$.

Φυλ 7/Ασκ 1

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ

$G(t)$ καταν. ενδιαμ. χρόνων

τ: μέσος ενδιαμ. χρόνος

σ^2: διασπορά ενδιαμ. χρόνων

$M(t) = E[N(t)]$

$H(t) = E[N(t)] - \frac{t}{\tau}$

i) Να διατυπωθεί ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί
ii) Να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to\infty}\left(M(t)-\frac{t}{\tau}\right)$

$$H(t)=M(t)-\frac{t}{\tau}=\int_0^\infty \overset{\text{χρόνος 1ης γεγ.}}{E[N(t)\mid X_1=x]}\,dG(x)-\frac{t}{\tau}$$

$$E[N(t)\mid X_1=x]=\begin{cases}0, & x>t\\ 1+E[N(t-x)], & x\le t\end{cases}$$

Οπότε
$$H(t)=\int_0^t\left(1+M(t-x)\right)dG(x)-\frac{t}{\tau}=\int_0^t\left(1+H(t-x)+\frac{t-x}{\tau}\right)dG(x)-\frac{t}{\tau}$$

$$=\underbrace{\int_0^t\left(1+\frac{t-x}{\tau}\right)dG(x)-\frac{t}{\tau}}_{D(t)}+\int_0^t H(t-x)\,dG(x)$$

λύση της ανανεωτικής εξίσωσης:
$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-x)\,dM(x)$$

$$\lim_{t\to\infty}M(t)-\frac{t}{\tau}=\lim_{t\to\infty}H(t)\overset{\text{ΒΑΘ}}{=}\frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau}=\dots=\frac{\sigma^2-\tau^2}{2\tau^2}$$

Φυλ 7 | Ασκ 2

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$

$H(t)=E[N(t)(N(t)-1)],\ t\ge 0$

Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί.

Δεσμεύουμε στον 1ο χρόνο ανανέωσης X_1

$$H(t)=E[N(t)(N(t)-1)]=\int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1)\mid X_1=x]\,dG(x)$$

Οπότε
$$E[N(t)(N(t)-1)\mid X_1=x]=\begin{cases}0, & x>t \quad (N(t)=0)\\ E[(1+N(t-x))N(t-x)], & x\le t\end{cases}$$

$$E[(1+N(t-x))N(t-x)]=2E[N(t-x)]+H(t-x)=2M(t-x)+H(t-x)$$

$N(t)\overset{d}{=}1+N(t-x)$ από την $X_1=x<t$
ισότητα κατά κατανομή

Αρα, $H(t) = \int_0^t (2M(t-x) + H(t-x))\, dG(x)$

$$= \underbrace{2\int_0^t M(t-x)\, dG(x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$$: Αναν. εξισ για $H(t)$

Ομως $D(t) = 2\int_0^t M(t-x)\, dG(x)$

και $M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-x)\, dG(x)$ ← Αναν. εξισ για την $M(t)$ (1)

Οποτε: $D(t) = M(t) - G(t)$

Αρα, η λυση της αναν. εξισ ειναι:

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM(x)$$

$$= 2(M(t) - G(t)) + 2\int_0^t (M(t-x) - G(t-x))\, dM(x)$$

$$= 2(M(t) - G(t)) + 2\int_0^t M(t-x)\, dM(x) - 2\int_0^t G(t-x)\, dM(x)$$

$$= 2(M(t) \cancel{- G(t)}) + 2\int_0^t M(t-x)\, dM(x) \cancel{- 2(G*M)(t)}$$

↳ η $M(t)$ ειναι συνελιξη της G με την M αφαιρωντάς το $G(t)$ απο (1)

$$= 2M^{*2}(t)$$

Ασκ 4, 5 του φυλ χωρις να ελεγχουμε τις 2 προϋποθεσεις.