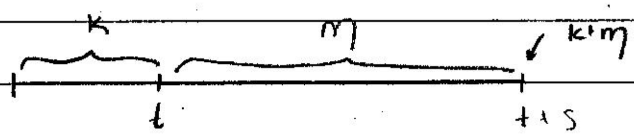
20/3/2016

# Ασκήσεις

## Φυλ 2 / Ασκ 1

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$. $P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m)=;$

$t,s \geq 0$ , $k,m \geq 0$




$$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) = \frac{P(N(t)=k,\ N(t+s)=k+m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$= \frac{P(N(t)=k,\ N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{\underset{\text{προσ}}{=}} \frac{P(N(t)=k)\cdot P(N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$\overset{\text{ομογ.}}{\underset{\text{προσ}}{=}} \frac{P(N(t)=k)\cdot P(N(s)=m)}{P(N(t+s)=k+m)}$$

$$\overset{N(u)\sim Poisson(\lambda u)}{=} \frac{\cancel{e^{-\lambda t}} \frac{(\cancel{\lambda} t)^k}{k!}\ \cancel{e^{-\lambda s}} \frac{(\cancel{\lambda} s)^m}{m!}}{\cancel{e^{-\lambda(t+s)}} \frac{(\cancel{\lambda}(t+s))^{m+k}}{(m+k)!}}$$

$$= \binom{m+k}{k}\left(\frac{t}{t+s}\right)^k\left(\frac{s}{t+s}\right)^m$$

(Τι μας δείχνει; $N(t) \mid N(t+s)=n \sim Bin\left(n, \frac{t}{t+s}\right)$)

## Φυλ 2 / Ασκ 2

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$. $P(N(t)=\text{περιττός})=;$

$$P_{N(t)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t z)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t z}$$

$$= e^{-\lambda t(1-z)}$$

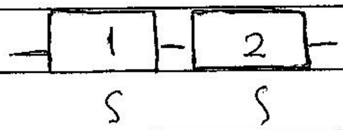
$P_{N(t)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) = 1$

$P_{N(t)}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)(-1)^n = e^{-2\lambda t}$

Όμως, $P_{N(t)}(1) - P_{N(t)}(-1) = 2\sum_{n\ \text{περιττός}} P(N(t)=n)$

$$P(N(t)\ \text{περιττός}) = \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2}$$

Φυλ 2/ Ασκ 3




Μέσος χρόνος ζωής συστήματος;

Χρονος ζωης: exp(λ) Gamma(n, μ)

Ανεξ. τ.μ.

1ος τροπος

$X$ χρ ζωης της 1

$Y_n$ χρ ζωης της 2

$Z_n = \min(X, Y_n)$ χρ ζωης συστ.

μη αρνητική τ.μ.

$$E[Z_n] = \int_0^{\infty} (1 - F_{Z_n}(t))\,dt = \int_0^{\infty} P(Z_n > t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} P(X>t, Y_n>t)\,dt \overset{\text{ανεξ}}{=} \int_0^{\infty} P(X>t)\,P(Y_n>t)\,dt$$

$$\underset{Y_n \sim \text{Gamma}(n,\mu)}{\overset{X\sim \exp(\lambda)}{=}} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{k!}\int_0^{\infty} t^k e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt$$

ο χρόνος του n-οστού γεγ. σε διαδ. Poisson $Y(t)$ ρυθμού λ.

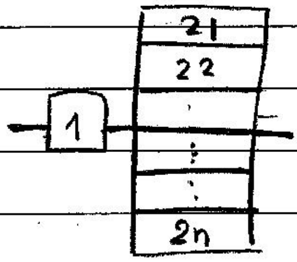
$\{Y_n > t\} = \{Y(t) = n\}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^k}{\cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{(\lambda+\mu)^{k+1}}{k!} t^{(k+1)-1} e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt}_{\text{σ.π.π. Gamma}(k+1,\mu) = 1}$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k$$

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n}{1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^n\right)$$

## 2ος τροπος




Το 2ο σύστημα έχει n "ζωές"

Το ολικό σύστημα χαλάει όταν χαλάσει το σύστημα 1 ή όταν τελειώσουν όλες οι ζωές του συστήματος 2.

$$E[Z_n] = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot E[Z_{n-1}]$$

*δέσμευση στο 1ο γεγ. που μπορεί να συμβεί*

$$= \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} E[Z_{n-1}]$$

$$x = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} x \quad \left(\Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda}\right)$$

Αφαιρώντας, $E[Z_n] - x = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(E[Z_{n-1}] - x\right)$

$$= \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^{n-1}} \cdot \left(E[Z_1] - x\right)$$

$$\Rightarrow E[Z_n] - \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{\lambda+\mu} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow E[Z_n] = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^{n-1}}\right) + \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^n}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^{n-1}} + \frac{\lambda\mu^{n-1}}{(\lambda+\mu)^n}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\mu^n}{(\lambda+\mu)^n}\right)$$

## 3ος τρόπος

$$E[Z_n] = E[\min(X, Y_n)] = E[X + \min(0, Y_n - X)]$$
$$= E[X] + E[\min(0, Y_n - X)]$$
$$= \frac{1}{\lambda} + P(Y_n \geq X)\, \cancel{E[0 \mid Y_n \geq X]}^{\,0} + P(X > Y_n) \cdot E[Y_n - X \mid X > Y_n]$$
$$= \frac{1}{\lambda} - \underbrace{P(X > Y_n)}_{=} \underbrace{E[X - Y_n \mid X > Y_n]}_{1/\lambda}$$

όλες οι ζωές του δεύτερου συστήματος τελειώνουν πριν τη ζωή του πρώτου. $= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n\right)$$

## Φυλ 2 | Ασκ 4

Αφίξεις με ρυθμό 8/ώρα σύμφωνα με σ.δ. Poisson $N(t)$ — $t$ σε ώρες

a) $E[N(8)] = 8 \cdot 8 = 64$, $V[N(8)] = 8 \cdot 8 = 64$

β) $P(N(\frac{1}{4}) = 0) = e^{-2}$

γ) $\mathrm{Cov}(N(2), N(2) - N(1)) = \mathrm{Cov}(N(1) + (N(2) - N(1)), N(2) - N(1))$

ή $\mathrm{Cov}(N(11) - N(9), N(11) - N(10))$ $= \cancel{\mathrm{Cov}(N(1), N(2) - N(1))}^{\,0} + \mathrm{Var}(N(2) - N(1))$

$\overset{\text{ολοφ}}{=} \mathrm{Var}(N(1))$ στασ. αυξ.

$\overset{\text{προ.}}{=} 8.$

δ) $\mathrm{Cov}(N(2), N(26) - N(25)) \overset{\text{αυξ}}{\underset{\text{προσ}}{=}} 0$

## Φυλ 2 | Ασκ 5

$\{N_1(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda_1$ } ανεξ
$\{N_2(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda_2$

$A_i$ = # γεγ. στην $\{N_i(t)\}$ πριν το 1ο γεγονός στην άλλη διαδ.

a) $P(A_i = k) = ;$

β) $A_1, A_2$ ανεξ;

|— × — × — o — × — o — × — × →        $\times \to 1$

$A_1 = 2$ , $A_2 = 0$        $o \to 2$

|— o — o — × — × — o — × — × — × →

$A_1 = 0$ , $A_2 = 2$

β) $A_1, A_2$ όχι ανεξάρτητες πχ $P(A_2 = 0 \mid A_1 > 0) = 1$

ενώ $P(A_2 = 0) < 1$

α) $P(A_i = k) = P\begin{pmatrix} 1: \text{ γεγ. τύπου } i \\ 2: \text{ γεγ τύπου } i \\ \vdots \\ k: \text{ γεγ τύπου } i \\ k+1 \text{ γεγ όχι τύπου } i \end{pmatrix} = \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \cdot \left(1 - \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{1}+\lambda_2}\right)$ , $k \geq$

$A_i$ γεωμετρική

2ος τρόπος

$P(A_i = k) = P(\#$ γεγ. της $N_i(t)$ στο χρόνο $S_1^{i'}$ του πρώτου γεγ της άλλης $= k)$

$$= P(N_i(S_1^{i'}) = k)$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{P(N_i(x) = k \mid \cancel{S_1^{i'} = x})}_{e^{-\lambda_i x}\frac{(\lambda_i x)^k}{k!}} \underbrace{f_{S_1^{i'}}(x)}_{\lambda_{i'} e^{-\lambda_{i'} x}} dx$$

δεν λέει κάτι για το άλλο

$$= \frac{\lambda_i^k \cdot \lambda_{i'}}{k!} \int_0^\infty x^k e^{-(\lambda_i + \lambda_{i'})x} dx$$

$$= \frac{\lambda_i^k \, \lambda_{i'}}{\cancel{k!}} \frac{\cancel{k!}}{(\lambda_i + \lambda_{i'})^{k+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda_i + \lambda_{i'})^{k+1}}{k!} x^{(k+1)-1} e^{-(\lambda_i + \lambda_{i'})x} dx}_{1}$$

$$= \frac{\lambda_i^k (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_i)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{k+1}}$$

$$= \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

Φυλ 3 | Ασκ. 3

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda$. $S_1, S_2, \ldots$ χρονοι αφιξ.

Μέσος χρονος προηγ. τελ. αφιξ. πριν το $t$ = $E[S_{N(t)}] = ;$

$$E[S_{N(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E[S_{N(t)} \mid N(t)=n]}_{= E[S_n \mid N(t)=n] = E[U_{n:n}] = \frac{nt}{n+1}} \cdot \underbrace{P(N(t)=n)}_{= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt}{n+1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\, n \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} (k-1) \frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{= \lambda t - (1 - e^{-\lambda t})}$$

$$= \frac{1}{\lambda} (\lambda t - 1 + e^{-\lambda t})$$