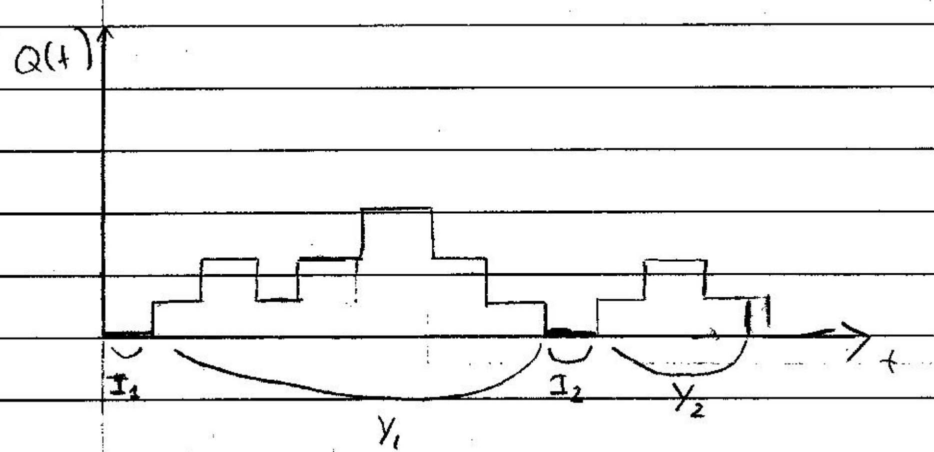
22/4/2016

Ουρές Αναμονής
Βασικά Αποτελέσματα και Εφαρμογές

Πλαίσιο

Q = # πελ. τη στιγμή σε μία τυχαία χρονική στιγμή
Q^- = # πελ αμέσως πριν την αφιξη πελάτη
Q^+ = # πελ. αμεσως μετα την αναχωρηση πελατη
S = Χρονος παραμονης
W = Χρονος αναμονης
X = Χρονος εξυπηρετησης
I = Περιοδος λειτουργιας
Y = Περιοδος συνεχους λειτουργιας
Z = Κυκλος λειτουργιας



Βασικό Αποτέλεσμα 1: Χαρακτηρισμός Ευστάθειας

λ = ρυθμος αφιξεων
b = μεσος χρ. εξυπηρέτησης
$\rho = \lambda b$: ρυθμος συνωστισμού

Θεώρημα:

Σε μια $GI/G/c$ ουρά (όχι ντετερμινιστική δλδ όχι D/

ισχύει:

1) $\rho < c \Rightarrow \exists (p_n), (r_n), (d_n)$ με $p_n, r_n, d_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$

2) $\rho \geq c \Rightarrow p_n = r_n = d_n = 0 \;\; \forall n$, $P(Q=\infty) = P(Q^- = \infty) = P(Q^+ =$

Βασικό Αποτέλεσμα 2: Νόμος του Little

$E[Q]$: Μέσος # πελατών σε συνεχή χρόνο

λ: Ρυθμός αφίξεων

$E[S]$: Μέσος χρόνος παραμονής πελάτη

Θεώρημα:

$$E[Q] = \lambda E[S]$$

Αιτιολόγηση 1η (Οικονομική)

Έστω ότι κάθε πελάτης πληρώνει 1 χρηματική μονάδα ανά χ

μονάδα παραμονής του στο σύστημα

Μακροπρόθεσμο Κέρδος Διαχειριστή ανά χρονική μονάδα αν οι πληρωμές γίνονται ανά χρον. μονάδα	=	Μακροπρόθεσμο Κέρδος Διαχειριστή αν οι πληρωμές γίνονται με την άφιξη των πελατών
$\Vert$		$\Vert$
$E[Q]$		Μέσο πλήθος αφίξεων ανά χρονική μονάδα × Πληρωμή ανά αφικν. πελ.
		$\Vert$
		$\lambda \times E[S]$

Απόδειξη 2ⁿ (Ανανεωτική)

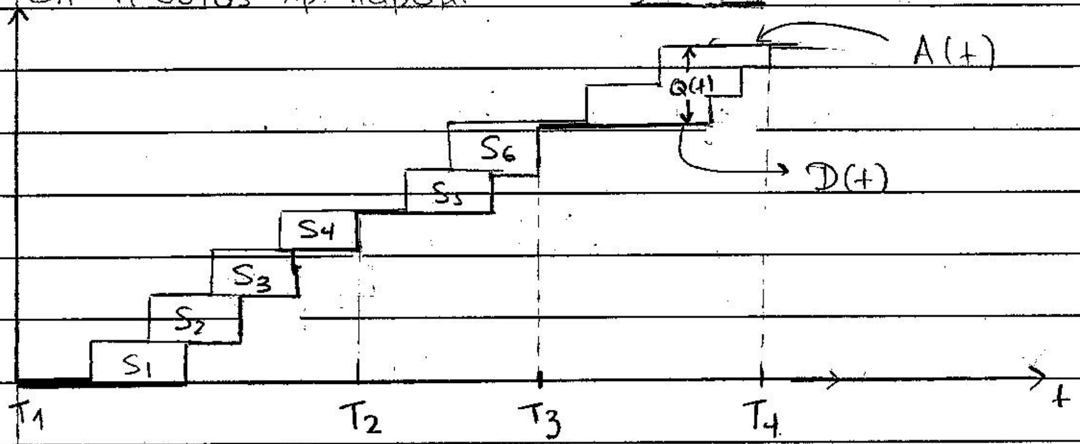
$A(t) = \#$ αφίξεων στο $[0,t]$

$D(t) = \#$ αναχωρ. στο $[0,t]$

$Q(t) = \#$ πελ. τη στιγμή $t = A(t) - D(t)$

T_n = Στιγμή έναρξης του n-οστού κύκλου λειτ.

S_n = n-οστός χρ. παροχ.



$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{T_n} Q(u)du}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{T_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A(T_n)}{T_n} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{A(T_n)}} = \lambda \cdot E[S]$$

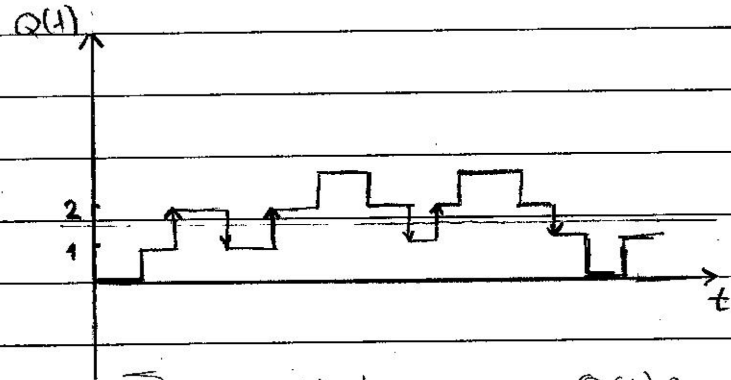
Δειγματικός μέσος (όταν είναι πολλά τα S_i πηγαίνει στη μέση τιμή,

Βασικό Αποτέλεσμα 3: Ιδιότητα Μεμονωμένων Μεταβάσεων

Μεμονωμένες
Μεταβάσεις
(Αφίξεις & Αναχωρήσεις) $\Rightarrow \quad r_n = d_n \quad \forall n$

πιθ. n πελατών σε στιγμή άφιξης — πιθ. n πελατών σε στιγμή αναχώρησης

Αιτιολόγηση



Στο γράφημα της Q(t):

Διασχίσεις της γραμμής $n+\frac{1}{2}$ προς τα επάνω (upcrossings) = Διασχίσεις της γραμμής $n+\frac{1}{2}$ προς τα κάτω (downcrossings) ± 1 για κάθε χρ. στ.

μέλλον αφιξ. ⟹ # αφίξεων που βλέπουν n πελάτες στο σύστ. = # αναχωρ. που αφήνουν n πελάτες στο σύστ. ± 1 για κάθε χρ. στιγμ.

Άρα, $|A_n(t) - D_n(t)| \leq 1$, $\forall\, t, n$ → φραγμένο

Οπότε, $\frac{A_n(t)}{t} = \frac{D_n(t)}{t}$

$$r_n = \lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{A_n(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{D_n(t)}{t}}{\frac{D(t)}{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{D(t)} =$$

Βασικό Αποτέλεσμα 4: Ιδιότητα PASTA (Wolff)

↳ Poisson Arrivals See Time

Poisson διαδ. αφίξεων ⟹ $r_n = p_n \quad \forall n$

r_n: πιθ. n πελατών σε στιγμή άφιξης

p_n: πιθ. n πελατών σε τυχαία χρον. στιγμή

Αιτιολόγηση

$$A(t, t+\delta t) = \{\text{Αφιξη στο } (t, t+\delta t)\}$$

$$r_n = \lim_{\substack{t\to\infty \\ \delta t \to 0^+}} P(Q(t)=n \mid A(t+\delta t))$$

$$= \lim_{\substack{t\to\infty \\ \delta t \to 0^+}} \frac{P(Q(t)=n) \cdot P(A(t+\delta t) \mid \cancel{Q(t)=n})/\delta t}{P(A(t+\delta t))/\delta t}$$

φευγει η δέσμευση διότι το Q(t)= αναφερεται σε γεγονοτα μεχρι τη στιγμη t ενω το A(t+δt) πιο μετα. Λογω ανεξαρτητων προσαυξησεων φευγει η δεσμευση.

$$= \frac{p_n \lambda}{\lambda}$$

$$= p_n$$

Βασικές Εφαρμογές

1) Νόμος του Little στο Χώρο Αναμονής

$$E[Q_q] = \lambda \cdot E[W]$$

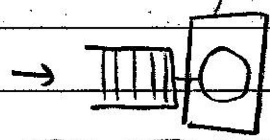
Μέσο πληθος πελ σε αναμονή

Μέσος χρόνος Αναμονης

Εφαρμοζω το νομο του Little σε αυτό το κομμάτι

2) Νόμος του Little στο Χώρο Εξυπηρετησης

$$E[Q_s] = \lambda \cdot E[X] = \lambda b = \rho$$



Μέσος # πελ σε διαδ. εξυπηρετησης

Μεσος χρονος εξυπηρέτησης

||

Μέσος # απασχολημενων υπηρετών

Ενδιαφερον συμπερασμα

Μεσος # απασχ υπηρετων $= \rho$

πχ. $\lambda = 20$ πελ/ωρα

$b = 5$ λεπτα $= 1/12$ ωρας

Μεσος # απασχ υπηρετων $= \frac{20}{12} = 1,66$.

απασχολημένων υπηρετών $\sim \text{Bin}(\underbrace{c}_{\#\,\text{υπηρ.}},\ \underbrace{p}_{\text{πιθ απασχ. υπηρ.}})$

$\Rightarrow \underbrace{E[\#\ \text{απασχ. υπηρ}]}_{\rho} = c \times \text{πιθ. απασχ υπηρ.}$

$\Rightarrow$ πιθ. απασχ υπηρ. $=$ μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου απασχ. υπηρ $= \dfrac{\rho}{c}$

3) Πιθανότητα κενού συστήματος στην GI/G/1 ουρά

$E[Q_s] = \rho$

$\Rightarrow 0 \cdot P(Q_s = 0) + 1 \cdot P(Q_s = 1) = \rho$

$\Rightarrow 1 - \underbrace{P(Q=0)}_{P_0} = \rho$

$\Rightarrow P_0 = 1 - \rho$