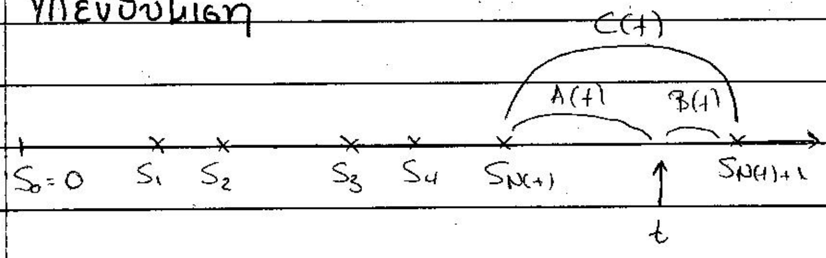
15/4/2016

Αναν. θεωρία

Ηλικία, Υπολειπόμενος / εξαρτώμενος χρόνος

Υπενθύμιση



$A(t) = t - S_{N(t)}$: ηλικία

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$: υπολειπόμενος χρόνος

$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$: t-εξαρτώμενος

τ : μέση τιμή ενδιάμεσων χρόνων, σ^2 : διασπορά ενδ. χρον

Μελέτη του "μέσου" $B(t)$

Θεωρ.

1] Μακροπρόθεσμος Μέσος του $B(t)$ $= \lim_{t\to\infty} E\left[\int_0^t B(u)du\right] = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

2] Μέση τιμή $B(t) = E[B(t)] = \int_t^\infty (1-G(u))du + \int_0^t D(t-u)\,dU_G(u)$

3] Οριακή μέση τιμή $B(t) = \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \dfrac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

Αποδείξεις

1) Βλέπε προηγ. μάθημα

2) $E[B(t)] = \int_0^\infty E[B(t) \mid X_1 = u]\, dG(u)$

$$E[B(t) \mid X_1 = u] = \begin{cases} u-t, & t<u \\ E[B(t-u)], & t \geq u \end{cases}$$

$$H(t) = E[B(t)] = \underbrace{\int_t^{\infty} (u-t)\,dG(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

$$\begin{cases} u \geq t \\ 0 \leq x \leq u-t \end{cases}$$

Έχω,

$$D(t) = \int_t^{\infty}\int_0^{u-t} dx\,dG(u) = \int_0^{\infty}\left(\int_{x+t}^{\infty} dG(u)\right) dx \longrightarrow (1-G(x+t))$$

$$= \int_0^{\infty} (1-\underbrace{G(x+t)}_{y})\,dx = \int_t^{\infty} (1-G(y))\,dy$$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM_G(u)$$

3) $D(t) = \int_t^{\infty} (1-G(y))\,dy$ → μη αρνητική (ολοκληρωμα μη αρν. συναρ

→ μονοτονη (φθινουσα διοτι οσο αυξανει το

μικραινει το ολοκληρωμα)

$$\to \int_0^{\infty} |D(t)|\,dt = \int_0^{\infty}\int_t^{\infty} (1-G(y))\,dy\,dt$$

$$= \int_0^{\infty}\int_t^{\infty}\int_y^{\infty} dG(u)\,dy\,dt$$

το έκανα για να βγει το $dG(u)$ έξω ώστε στο τέλος να βγει μια μέση τιμή. $(0 \leq t \leq y \leq u < \infty)$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{u}\int_0^{y} dt\,dy\,dG(u)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{u^2}{2}\,dG(u)$$

$$= E\left[\frac{X^2}{2}\right] < \infty, \quad X \sim G$$

$$\text{ΒΑΘ: } \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\int_0^{\infty} D(t)\,dt}{\tau} = \frac{E[X^2]}{2\tau} = \frac{Var[X] + (E[X])^2}{2\tau} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau}$$

Το ανανεωτικό παράδοξο

$$\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} = \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma^2}{2\tau} \geq \frac{\tau}{2}$$

Οριακός Μέσος Υπολειπ. Χρονος Αναν $\geq$ $\frac{\text{Μέσος ενδιάμεσος χρόνος}}{2}$

↑ $\sigma^2 \geq 0$

Μελέτη της κατανομής του $B(t)$

Θεώρημα:

1) Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που $B(t) > x$ $= \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\overbrace{\int_0^t 1\{B(u)>x\}du}^{\text{χρόνος στο } [0,t] \text{ που η } B(u)>x}\right]}{t} = \frac{\int_x^\infty (1-G(y))dy}{\tau}$

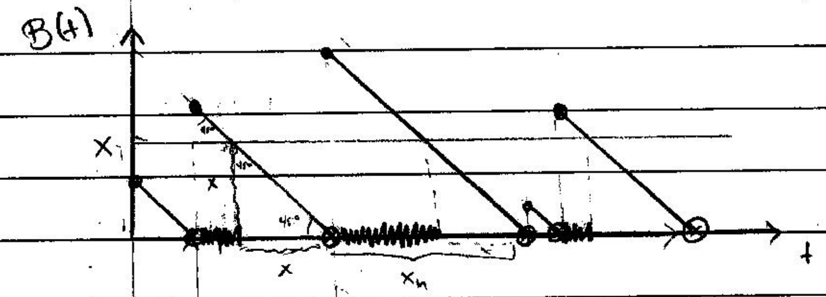
2) Πιθ $\{B(t)>x\} = P(B(t)>x)$

3) Οριακή πιθ $\{B(t)>x\} = \lim_{t\to\infty} P(B(t)>x)$

Αποδ

1) Ορίζω $R(t) = \int_0^t 1\{B(u)>x\}du$ (έτσι όπως μας δίνουν το πρόβλημα φαίνεται τι θα ορίσω ως διαδικασία αμοιβής $R(t)$)

$= $ χρόνος στο $[0,t]$ που $B(u)>x$



Τα "~~" είναι ο χρόνοι που $B(t)>x$

Έστω X_n ο n-οστός ενδιάμ. χρόνος, S_n ο χρόνος του n-οστού γεγ.

$R_n = R(S_n) - R(S_{n-1}) =$ Χρόνος μέσου στον ενδιάμ. χρόνο X_n που $B(u)>x$ $= \begin{cases} X_n - x, & X_n > x \\ 0, & X_n \le x \end{cases}$

$= \max(X_n - x, 0)$

$(X_n, R_n) = (X_n, \max(X_n - x, 0))$ ανεξ. ισόν $n \geq 1$

ΣΑΘΑ: $\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{B(u)>x\}}du\right]}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]}$

• $E[X_n] = \tau$

$x \geq 0$, $X \sim F_X$
$E[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,dx$

• $E[R_n] = E[\overbrace{\max(X_n - x, 0)}^{\geq 0}] = \int_0^\infty (1 - F_{\max(X_n-x),(0)}(u))\,du$

$= \int_0^\infty (1 - P(\max(X_n - x), 0 \leq u)\,du$

το u είναι σίγουρα ≥ 0 από τα άκρο του ολοκληρώματος

$= \int_0^\infty (1 - P(X_n - x \leq u))\,du$

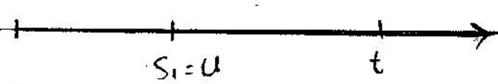
$= \int_0^\infty (1 - G(\underbrace{x+u}_{y}))\,du$

$= \int_x^\infty (1 - G(y))\,dy$

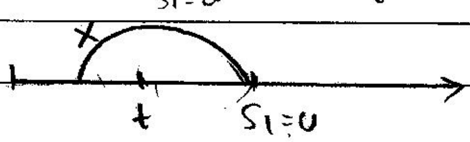
2) $H(t) = P(B(t) > x) = \int_0^\infty P(B(t) > x \mid X_1 = u)\,dG(u)$

$$P(B(t) > x \mid X_1 = u) = \begin{cases} 0, & t \leq u - x \quad \text{Περ III} \\ 1, & u - x \leq t < u \quad \text{Περ II} \\ P(B(t-u) > x), & t \geq u \quad \text{Περ I} \end{cases}$$

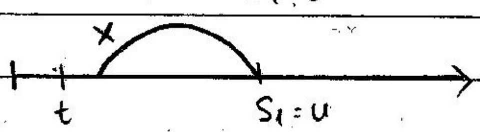
Περ I:



Περ II:



Περ III



Οπότε, $H(t) = \underbrace{\int_{x+t}^\infty dG(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

Όμως, $D(t) = \int_{x+t}^\infty dG(u) = 1 - G(x+t)$

Άρα $H(t) = (1 - G(x+t)) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$

$\Rightarrow H(t) = (1 - G(x+t)) + \int_0^t (1 - G(t+x-u))\,dM_G(u)$

3) $\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x) = \lim_{t\to\infty} H(t) \underset{\text{ΒΑΘ}}{\overset{}{=}} \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{\tau}$.

Ισχύουν οι συνθήκες;

$D(t) = 1 - G(x+t)$, ◦ ≥ 0

• φθίνουσα (όταν το t αυξάνει η $G(x+t)$ αυξάνει άρα η $D(t)$ μειώνεται)

◦ φραγμένη ($G(x+t) \in [0,1]$ άρα $D(t) \leq 1$)

• $\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty (1 - G(\underbrace{x+t}_{y}))dt = \int_x^\infty (1 - G(y))dy$

$< \int_0^\infty (1-G(y))dy = \tau < \infty$

Τελικά, $\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x) = \frac{\int_x^\infty (1-G(y))dy}{\tau}$

Κατανομή ισορροπίας της G

Ορισμός:

Έστω $X \geq 0$, $X \sim G$ (σ.κ) Τότε ορίζουμε $G_e(x)$ την κατανομή ισορροπίας της $G(x)$ που αντιστοιχεί στην οριακή κατανομή του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης με ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν την G Είναι:

$$G_e(x) = 1 - \frac{\int_x^\infty (1-G(y))dy}{\tau} = \frac{\int_0^x (1-G(y))dy}{\tau}$$

Αν πω να το κάνω ομώνυμα έχω: $\frac{\tau - \int_x^\infty (1-G(y))dy}{\tau}$

Όμως, $\tau = \int_0^\infty (1-G(y))dy$ άρα προκύπτει το παραπάνω

equilibrium

Ιδιότητες

$X \sim G$: σ.κ

g: σ.π.π

τ: μέση τιμή

σ^2: διασπορά

$\tilde{G}(s)$: μετασχ. L-S

$\longrightarrow$

$X_e \sim G_e(x) = \frac{\int_0^x (1-G(y))dy}{\tau}, \quad x \geq 0$

$g_e(x) = \frac{1-G(x)}{\tau}, \quad x \geq 0$

$\tau_e = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}, \quad x \geq 0$

$\tilde{G}_e(s) = \frac{1-\tilde{G}(s)}{\tau s}$

Αποδ

$$\tilde{G}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG_e(x) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1-G(x)}{\tau} dx = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty dG(y)\, d$$

$(0 \leq x \leq y < \infty)$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \underbrace{\int_0^y e^{-sx}\, dx}_{\left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right|_{x=0}^{x=y}}\, dG(y) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{1-e^{-sy}}{s}\, dG(y)$$

$$= \frac{1}{\tau s}\left(1 - \tilde{G}(s)\right) \qquad \left(\int_0^\infty 1\, dG(y) = 1 \;\&\; \int_0^\infty e^{-sy} dG(y) = \tilde{G}(s)\right)$$

Ειδικές περιπτώσεις

$X = c$ σταθ $\Rightarrow X_e \sim$ Uniform $([0,c])$

$X \sim exp(\lambda) \Rightarrow X_e \sim Exp(\lambda)$

$X \sim Gamma(2,\lambda) \Rightarrow X_e \sim$