13/4/2016

Εφαρμογές : ΣΑΘΑ, Αναν. Εξίσωση, ΒΑΘ

Υπενθύμιση

1) ΣΑΘΑ: $\{N(t)\}$ αναν διαδ, Ενδ. χρονοι $\sim G$
$\{R(t)\}$ διαδ. αμοιβών
(X_n, R_n), $n \geq 1$ ανεξ ισον
n-οστος ενδιαμ. χρον — αντιστοιχη αμοιβη

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R}{E[X}$$

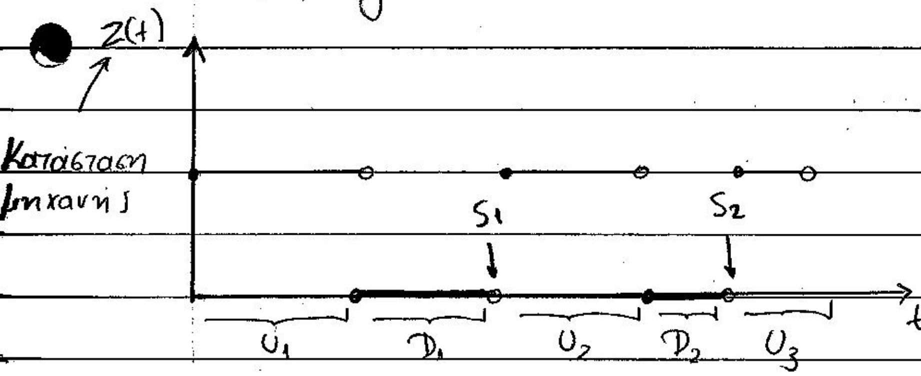
2) Αναν. Εξίσωση: $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$
Λύση: $H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x)$

3) ΒΑΘ: $G(t)$ συνεχης
$D(t)$ διαφορά 2, ≥ 0, μονοτ. φραγμ.
$\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{c}$$

c: μέσος ενδιαμέσος χρόνος

Εφαρμογή : Η εναλλασσομενη αναν διαδ (συνεχεσ προηγ μο



Μηχανή που εναλλασ. σε
περ. λειτουργία και επισκευ
n-οστος χρονος λειτ. U_n
n-οστος χρονος επισκ. D_n
(U_n, D_n) ανεξ ισον $\sim G_{U,D}(x,y)$

1) Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρονου λειτουργιας $\left(= \lim_{t \to \infty} \frac{E[\int_0^t Z(u)du]}{t}\right.$
2) Πιθ. λειτ. μια στιγμη t $(= P(Z(t) = 1))$
3) Οριακη πιθ λειτ. $(= \lim_{t \to \infty} P(Z(t) = 1))$

1) Ορίζω $R(t)=\int_0^t Z(u)du$ = Χρόνος λειτ. στο $[0,t]$

Επίσης, θεωρώ την ανανεωτική διαδ.:

$N(t)$: # των εναρξεων λειτ. μηχ. στο $[0,t]$

Κατανομή ενδιάμ. χρ. είναι η $G_{U+D}(x)=P(U_n+D_n\le x)$

Έχω $X_n=U_n+D_n$, $R_n=\int_{S_{n-1}}^{S_n} z(u)du=U_n$

Έχω $(X_n,R_n)=(U_n+D_n,U_n)$ ανεξ. $n\ge 1$

Άρα εφαρμόζεται το ΣΑΘΑ:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[\int_0^t z(u)du\right]}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{E[R(t)]}{t}=\frac{E[R_n]}{E[X_n]}=\frac{E[U]}{E[U]+E[D]}$$

2) Θέτω $H(t)=P(Z(t)=1)$, δεσμεύω στον 1ο χρόνο αναν. και έχω:

$$H(t)=\int_0^\infty P(Z(t)=1\mid X_1=x)\,dF_1(x)$$

$$=\int_0^\infty P(Z(t)=1\mid U_1+D_1=x)\,dG_{U+D}(x)$$

Όμως,

$$P(Z(t)=1\mid U_1+D_1=x)=\begin{cases}P(U_1>t\mid U_1+D_1=x), & t<x\\ \underbrace{P(Z(t-x)=1)}_{=H(t-x)}, & t\ge x\end{cases}$$

Άρα, $$H(t)=\int_0^t H(t-x)\,dG_{U+D}(x)+\underbrace{\int_t^\infty P(U_1>t\mid U_1+D_1=x)\,dG_{U+D}(x)}_{=D(t)}$$

Όμως, $$D(t)=\int_t^\infty P(U_1>t\mid U_1+D_1=x)\,dG_{U+D}(x)\longleftrightarrow$$ αν ήταν διακριτές: $\sum_{x=t}^{\infty}P(U_1>t,U_1+D_1=x)$

$$=P(U_1>t,\,U_1+D_1>t)$$

$$=P(U_1>t)\leftarrow$$ συνάρτηση επιβίωσης στο t

$$=1-G_U(t)$$

Επομένως, $$H(t)=\underbrace{1-G_U(t)}_{D(t)}+\int_0^t H(t-x)\,dG_{U+D}(x)$$

$$\overset{\text{Λύση}}{\underset{\text{Αναν}}{\Longrightarrow}} H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, d\,U_{U+D}(x)$$

$$\Rightarrow P(z(t)=1) = 1 - G_U(t) + \int_0^t (1 - G_U(t-x))\, d\,U_{G_{U+D}}(x)$$

3) $G(t) = G_{U+D}(t)$ συνεχής

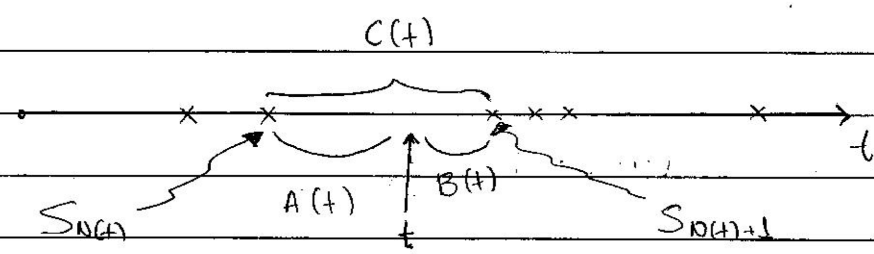
$D(t) = \underbrace{1 - \underbrace{G_U(t)}_{\text{αύξουσα}}}_{\text{φθίνουσα}} : \geq 0$, μονοτ, φραγμένη

δεν ξεπερνάει το 1

$$\int_0^\infty |D(t)|\, dt = \int_0^\infty (1 - G_U(t))\, dt = E[U] < \infty$$

Από ΒΑΘ: $\lim_{t\to\infty} P(z(t)=1) = \lim_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)\, dt}{\tau} = \dfrac{E[U]}{E[U]+E[D]}$

Ηλικία, Υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης



t: χρονική στιγμή

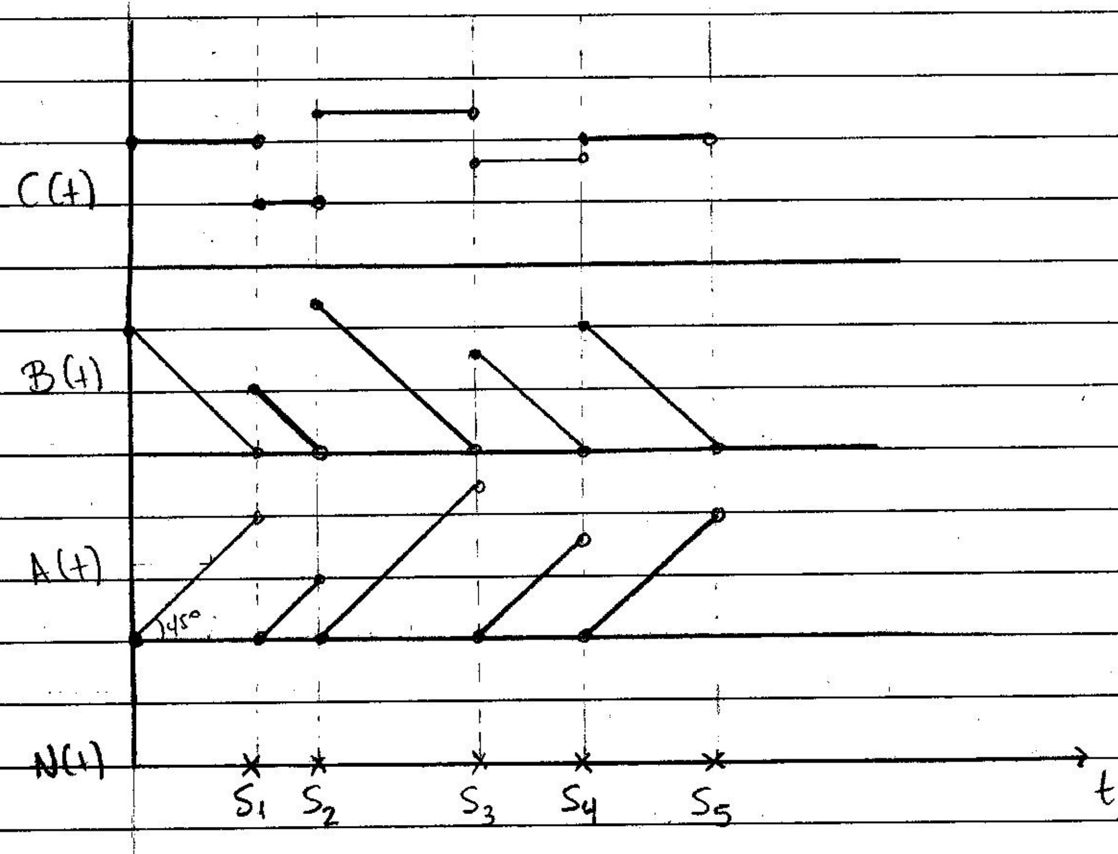
$S_{N(t)+1}$: χρονική στιγμή του επόμενου γεγονότος μετά την t

$S_{N(t)}$: χρονική στιγμή του προηγούμενου γεγονότος πριν την t

▶ $A(t) = t - S_{N(t)}$: ηλικία, αναδρομικός χρόνος ανανέωσης, οπισθοδρομικός χρόνος ανανέωσης

▶ $B(t) = S_{N(t)+1} - t$: προδρομικός χρόνος ανανέωσης, υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης

▶ $C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = A(t) + B(t)$: t- εξαρτώμενος χρόνος αναν.



Μελέτη "μέσου" υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης

$\{N(t)\}$ αναν διαδ με ενδιάμ χρον $X_1, X_2, \ldots$

$X_i \sim G(t)$, $E[X_i] = \tau$, $Var[X_i] = \sigma^2$

$S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων

$B(t) = S_{N(t)-1}$: Υπολ. χρονος αναν τη στιγμή t

Να βρεθούν:

1) Μακροπρόθεσμος Μέσος Υπολ. Χρον. Αναν $= \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t B(u)\,du\right]}{t}$

2) Μέσος Υπολ. Χρόνος Αναν τη στιγμή t $= E[B(t)]$

3) Οριακός Μέσος Υπολ. Χρον Αναν $= \lim\limits_{t\to\infty} E[B(t)]$

1) $R(t) = \int_0^t B(u)du$ διοδ αμοιβής

$$R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} B(u)du = \int_0^{X_n} (X_n - u)du = \int_0^{X_n} X_n du - \int_0^{X_n} u du$$

$$= X_n^2 - \frac{X_n^2}{2} = \frac{X_n^2}{2}$$

$(X_n, R_n) = \left(X_n, \frac{X_n^2}{2}\right)$ ανεξ ισον, $n \geq 1$

Διαισθησ

$E[X_1] = \tau$

$\Downarrow$

$E[B(t)] \simeq \frac{\tau}{2}$

λάθος

Απο ΣΑΘΑ:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t B(u)du\right]}{t} = \frac{E[R_n]}{E[X_n]} = \frac{E[X_n^2]}{2E[X_n]} = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\tau} = \frac{\tau}{2} + \frac{\sigma^2}{2\tau}$$

2) $H(t) = E[B(t)] = \int_0^\infty E[B(t) \mid X_1 = x]\, dG(x)$

$$E[B(t) \mid X_1 = x] = \begin{cases} x - t & , t < x \\ \underbrace{E[B(t-x)]}_{H(t-x)} & , t \geq x \end{cases}$$

Άρα, $H(t) = \underbrace{\int_t^\infty (x-t)\, dG(x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$

Έχουμε, $D(t) = \int_t^\infty (x-t)\, dG(x) = \int_t^\infty \int_0^{x-t} du\, dG(x)$

$$= \int_0^\infty \int_{u+t}^\infty dG(x)\, du = \int_0^\infty (1 - G(\underbrace{u+t}_{w}))du$$

συνάρτηση επιβίωσης

$$= \int_t^\infty (1 - G(w))dw$$

3) ΒΑΘ: $D(t) \geq 0$, φθιν, φραγμ $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(u)du}{\tau} = \frac{\tau^2 + \sigma^2}{2\tau} = \frac{\tau}{2} + $