

23/3/2016

Μη ομογενής διαδοίκα Poisson

Ορισμός μη ομογενούς διαδ. Poisson

Μια αναριθμητρία γεγονότων ε.δ. $\{N(t)\}$ ($N(t) \in \{0, 1, \dots\}$, $N(t) \uparrow$) λέγεται μη-ομογενής ε.δ. Poisson με συνάρτηση πυθμού $\lambda(t)$ αν:

(i) έχει ανεξαρτητες προσαιτήσεις

$$(ii) P(N(t+h) - N(t) = n) = \begin{cases} 1 - \lambda(t)h + o(h) & , n=0 \\ \lambda(t)h + o(h) & , n=1 \\ o(h) & , n \geq 2 \end{cases} \text{ όπου } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Κατανομή $N(t)$ για μη ομογενή ε.δ. Poisson

Θεωρ: Αν $\{N(t)\}$ μη ομογ. διαδ. Poisson με συνάρτηση πυθμού $\lambda(t)$ τότε για κάθε $t > 0$

$$N(t) \sim \text{Poisson} \left(\int_0^t \lambda(u) du \right)$$

Απόδειξη

ομοία με την απόδ. Ορσ III \Rightarrow Ορσ II στην κλασική ε.δ. Poisson

⊗

Βασική ημική μη ομογενών ε.δ. Poisson

Αν $\{N(t)\}$ ε.δ. Poisson πυθμού λ και κάθε γεγονός της καταγράφεται με πιθανότητα $p(t)$ αν έχει συμβεί τη στιγμή t και

$N_1(t) \neq \#$ καταγ. γεγονότων στο $(0, t]$

τότε η $\{N_1(t)\}$ είναι μη-ομογ. ε.δ. Poisson με συνάρτηση πυθμού $\lambda(t) = \lambda p(t)$

$$N_1(t) \sim \text{Poisson} \left(\lambda \int_0^t p(u) du \right)$$

⊗ Εντάς, $N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson} \left(\int_s^{t+s} \lambda(u) du \right)$

Σύνθετη Διαδικασία Poisson

Ορισμός σύνθετης ε.δ. Poisson

Αν $\{N(t)\}$ είναι ε.δ. Poisson πυθμού λ και Y_1, Y_2, \dots ανεξ. ισοδύναμα τ.κ. με κατανομή $G(x) = P(Y_i \leq x)$ τότε η $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ λέγεται σύνθετη ε.δ. Poisson πυθμού λ και με συνάρτηση κατανομής "λεγεθούς" γεγονότων $G(x)$.

Τι μπορεί να είναι το Y_i ;

π.χ. το $N(t)$ μπορεί να είναι το πλήθος των συζητήσεων και το Y_i το πλήθος των παρατηριών.

το $N(t)$ δείχνει πόσες παρτίδες έφτασαν σε ένα εργαστήριο μέχρι την χρονική στιγμή t και το Y_i το μέγεθος της παρτίδας.

Ασκήσεις

1. Έστω $\{N(t)\}$ λιμ. οικογένεια ε.δ. Poisson με συν. πυθμού $\lambda(t)$

S_n = χρόνος n -οστού γεγονότος N ;

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{S_n \leq x\} = \{N(x) \geq n\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{SOS} \\ \leftarrow \end{array}$$

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = P(N(x) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(N(x) = k)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(x)} \cdot \frac{(\Lambda(x))^k}{k!}, \quad \text{όπου } \Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u) du$$

Αν μας ενδιαφέρει η β.π.π της S_n :

$$\begin{aligned} f_{S_n}(x) = F'_{S_n}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} -\lambda(x) \cdot e^{-\Lambda(x)} \frac{(\Lambda(x))^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(x)} \frac{k(\Lambda(x))^{k-1} \lambda(x)}{k!} \\ &= \lambda(x) \cdot \frac{\Lambda(x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(x)}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Για $\lambda(x) = \lambda$ (λογ. ε.δ. Poisson):

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \lambda^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

η πυκνότητα σ.π.π της Erlang (n, λ)

2. Έστω $\{N(t)\}$ λμ-λογ. ε.δ. Poisson με συν. αριθμό λ , και S_1 ο χρόνος του 1^{ου} γεγονότος.

$$(S_1 | N(t) = 1) \sim ;$$

$$F_{S_1 | N(t) = 1}(x) = P(S_1 \leq x | N(t) = 1)$$

(στην ορολογία βγαίνει οποιοδήποτε, εδώ ληφθέντα δεν θα είναι. Περιφέρω το γεγονός να είναι πιο πιθανό να συμβούν εκεί που ο αριθμός είναι μεγαλύτερος)

Για $x \in [0, t]$:

$$\begin{aligned} F_{S_1 | N(t) = 1}(x) &= P(S_1 \leq x | N(t) = 1) \\ &= P(N(x) \geq 1 | N(t) = 1) \\ &= P(N(x) = 1 | N(t) = 1) \end{aligned}$$

(όταν υπάρχει S_1 & N_1 ή τα εναλλάξ
 για $x \in [0, t]$ ή $x \in [t, \infty)$)

$$\begin{aligned} &= P(N(x) = 1, N(t) - N(x) = 0) \\ &= P(N(x) = 1) \cdot P(N(t) - N(x) = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P(N(x) = 1) \cdot P(N(t) = 1) \\ &= \frac{e^{-\lambda x} \lambda^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-x)} \lambda^1}{1!} \end{aligned}$$

Έστω $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u) du$ τότε:

$$F_{S_1 | N(t) = 1}(x) = \frac{e^{-\lambda(x)} \frac{\lambda(x)^1}{1!} e^{-(\lambda(t-x))} \frac{(\lambda(t-x))^1}{1!}}{e^{-\lambda(t)} \frac{\lambda(t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}, \quad 0 \leq x \leq t$$

Για την σ.π.π:

$$f_{S_1 | N(t) = 1}(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)}, \quad 0 \leq x \leq t$$

Στην κλάση με ε.δ. Poisson:

$$f_{S_i, N(t)} = \lambda (x) = \frac{\lambda}{t} = \frac{1}{t} \quad 0 \leq x \leq t \quad (\text{ομοιομορφία})$$

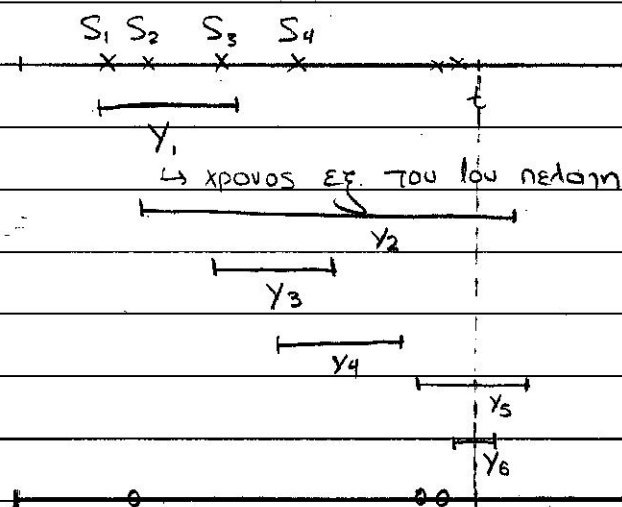
SOS 3. Η M/G/1 ουρά:

Πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης βολύφωνα με ε.δ. Poisson ρυθμού λ . Ο καθένας αρχίζει να εξυπηρετείται με την άφιξη του στο σύστημα, και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξ. τ.μ. με κατανομή $f(x)$. Έστω,

$N(t) = \#$ παρόντων πελατών τη στιγμή t .

$P(N(t) = n) = ;$

$E[N(t)] = ;$



Διαδ. αφίξεων Poisson ρυθμού λ

Θέλουμε να βρούμε ποσοί είναι αυτοί που έχουν μείνει μέχρι την χρονική στιγμή t . Εδώ είναι ο S_2 , ο S_3 ο S_4 ο S_5 ο S_6 ο S_7 ο S_8 ο S_9 ο S_{10} ο S_{11} ο S_{12} ο S_{13} ο S_{14} ο S_{15} ο S_{16} ο S_{17} ο S_{18} ο S_{19} ο S_{20} ο S_{21} ο S_{22} ο S_{23} ο S_{24} ο S_{25} ο S_{26} ο S_{27} ο S_{28} ο S_{29} ο S_{30} ο S_{31} ο S_{32} ο S_{33} ο S_{34} ο S_{35} ο S_{36} ο S_{37} ο S_{38} ο S_{39} ο S_{40} ο S_{41} ο S_{42} ο S_{43} ο S_{44} ο S_{45} ο S_{46} ο S_{47} ο S_{48} ο S_{49} ο S_{50} ο S_{51} ο S_{52} ο S_{53} ο S_{54} ο S_{55} ο S_{56} ο S_{57} ο S_{58} ο S_{59} ο S_{60} ο S_{61} ο S_{62} ο S_{63} ο S_{64} ο S_{65} ο S_{66} ο S_{67} ο S_{68} ο S_{69} ο S_{70} ο S_{71} ο S_{72} ο S_{73} ο S_{74} ο S_{75} ο S_{76} ο S_{77} ο S_{78} ο S_{79} ο S_{80} ο S_{81} ο S_{82} ο S_{83} ο S_{84} ο S_{85} ο S_{86} ο S_{87} ο S_{88} ο S_{89} ο S_{90} ο S_{91} ο S_{92} ο S_{93} ο S_{94} ο S_{95} ο S_{96} ο S_{97} ο S_{98} ο S_{99} ο S_{100} ο S_{101} ο S_{102} ο S_{103} ο S_{104} ο S_{105} ο S_{106} ο S_{107} ο S_{108} ο S_{109} ο S_{110} ο S_{111} ο S_{112} ο S_{113} ο S_{114} ο S_{115} ο S_{116} ο S_{117} ο S_{118} ο S_{119} ο S_{120} ο S_{121} ο S_{122} ο S_{123} ο S_{124} ο S_{125} ο S_{126} ο S_{127} ο S_{128} ο S_{129} ο S_{130} ο S_{131} ο S_{132} ο S_{133} ο S_{134} ο S_{135} ο S_{136} ο S_{137} ο S_{138} ο S_{139} ο S_{140} ο S_{141} ο S_{142} ο S_{143} ο S_{144} ο S_{145} ο S_{146} ο S_{147} ο S_{148} ο S_{149} ο S_{150} ο S_{151} ο S_{152} ο S_{153} ο S_{154} ο S_{155} ο S_{156} ο S_{157} ο S_{158} ο S_{159} ο S_{160} ο S_{161} ο S_{162} ο S_{163} ο S_{164} ο S_{165} ο S_{166} ο S_{167} ο S_{168} ο S_{169} ο S_{170} ο S_{171} ο S_{172} ο S_{173} ο S_{174} ο S_{175} ο S_{176} ο S_{177} ο S_{178} ο S_{179} ο S_{180} ο S_{181} ο S_{182} ο S_{183} ο S_{184} ο S_{185} ο S_{186} ο S_{187} ο S_{188} ο S_{189} ο S_{190} ο S_{191} ο S_{192} ο S_{193} ο S_{194} ο S_{195} ο S_{196} ο S_{197} ο S_{198} ο S_{199} ο S_{200} ο S_{201} ο S_{202} ο S_{203} ο S_{204} ο S_{205} ο S_{206} ο S_{207} ο S_{208} ο S_{209} ο S_{210} ο S_{211} ο S_{212} ο S_{213} ο S_{214} ο S_{215} ο S_{216} ο S_{217} ο S_{218} ο S_{219} ο S_{220} ο S_{221} ο S_{222} ο S_{223} ο S_{224} ο S_{225} ο S_{226} ο S_{227} ο S_{228} ο S_{229} ο S_{230} ο S_{231} ο S_{232} ο S_{233} ο S_{234} ο S_{235} ο S_{236} ο S_{237} ο S_{238} ο S_{239} ο S_{240} ο S_{241} ο S_{242} ο S_{243} ο S_{244} ο S_{245} ο S_{246} ο S_{247} ο S_{248} ο S_{249} ο S_{250} ο S_{251} ο S_{252} ο S_{253} ο S_{254} ο S_{255} ο S_{256} ο S_{257} ο S_{258} ο S_{259} ο S_{260} ο S_{261} ο S_{262} ο S_{263} ο S_{264} ο S_{265} ο S_{266} ο S_{267} ο S_{268} ο S_{269} ο S_{270} ο S_{271} ο S_{272} ο S_{273} ο S_{274} ο S_{275} ο S_{276} ο S_{277} ο S_{278} ο S_{279} ο S_{280} ο S_{281} ο S_{282} ο S_{283} ο S_{284} ο S_{285} ο S_{286} ο S_{287} ο S_{288} ο S_{289} ο S_{290} ο S_{291} ο S_{292} ο S_{293} ο S_{294} ο S_{295} ο S_{296} ο S_{297} ο S_{298} ο S_{299} ο S_{300} ο S_{301} ο S_{302} ο S_{303} ο S_{304} ο S_{305} ο S_{306} ο S_{307} ο S_{308} ο S_{309} ο S_{310} ο S_{311} ο S_{312} ο S_{313} ο S_{314} ο S_{315} ο S_{316} ο S_{317} ο S_{318} ο S_{319} ο S_{320} ο S_{321} ο S_{322} ο S_{323} ο S_{324} ο S_{325} ο S_{326} ο S_{327} ο S_{328} ο S_{329} ο S_{330} ο S_{331} ο S_{332} ο S_{333} ο S_{334} ο S_{335} ο S_{336} ο S_{337} ο S_{338} ο S_{339} ο S_{340} ο S_{341} ο S_{342} ο S_{343} ο S_{344} ο S_{345} ο S_{346} ο S_{347} ο S_{348} ο S_{349} ο S_{350} ο S_{351} ο S_{352} ο S_{353} ο S_{354} ο S_{355} ο S_{356} ο S_{357} ο S_{358} ο S_{359} ο S_{360} ο S_{361} ο S_{362} ο S_{363} ο S_{364} ο S_{365} ο S_{366} ο S_{367} ο S_{368} ο S_{369} ο S_{370} ο S_{371} ο S_{372} ο S_{373} ο S_{374} ο S_{375} ο S_{376} ο S_{377} ο S_{378} ο S_{379} ο S_{380} ο S_{381} ο S_{382} ο S_{383} ο S_{384} ο S_{385} ο S_{386} ο S_{387} ο S_{388} ο S_{389} ο S_{390} ο S_{391} ο S_{392} ο S_{393} ο S_{394} ο S_{395} ο S_{396} ο S_{397} ο S_{398} ο S_{399} ο S_{400} ο S_{401} ο S_{402} ο S_{403} ο S_{404} ο S_{405} ο S_{406} ο S_{407} ο S_{408} ο S_{409} ο S_{410} ο S_{411} ο S_{412} ο S_{413} ο S_{414} ο S_{415} ο S_{416} ο S_{417} ο S_{418} ο S_{419} ο S_{420} ο S_{421} ο S_{422} ο S_{423} ο S_{424} ο S_{425} ο S_{426} ο S_{427} ο S_{428} ο S_{429} ο S_{430} ο S_{431} ο S_{432} ο S_{433} ο S_{434} ο S_{435} ο S_{436} ο S_{437} ο S_{438} ο S_{439} ο S_{440} ο S_{441} ο S_{442} ο S_{443} ο S_{444} ο S_{445} ο S_{446} ο S_{447} ο S_{448} ο S_{449} ο S_{450} ο S_{451} ο S_{452} ο S_{453} ο S_{454} ο S_{455} ο S_{456} ο S_{457} ο S_{458} ο S_{459} ο S_{460} ο S_{461} ο S_{462} ο S_{463} ο S_{464} ο S_{465} ο S_{466} ο S_{467} ο S_{468} ο S_{469} ο S_{470} ο S_{471} ο S_{472} ο S_{473} ο S_{474} ο S_{475} ο S_{476} ο S_{477} ο S_{478} ο S_{479} ο S_{480} ο S_{481} ο S_{482} ο S_{483} ο S_{484} ο S_{485} ο S_{486} ο S_{487} ο S_{488} ο S_{489} ο S_{490} ο S_{491} ο S_{492} ο S_{493} ο S_{494} ο S_{495} ο S_{496} ο S_{497} ο S_{498} ο S_{499} ο S_{500} ο S_{501} ο S_{502} ο S_{503} ο S_{504} ο S_{505} ο S_{506} ο S_{507} ο S_{508} ο S_{509} ο S_{510} ο S_{511} ο S_{512} ο S_{513} ο S_{514} ο S_{515} ο S_{516} ο S_{517} ο S_{518} ο S_{519} ο S_{520} ο S_{521} ο S_{522} ο S_{523} ο S_{524} ο S_{525} ο S_{526} ο S_{527} ο S_{528} ο S_{529} ο S_{530} ο S_{531} ο S_{532} ο S_{533} ο S_{534} ο S_{535} ο S_{536} ο S_{537} ο S_{538} ο S_{539} ο S_{540} ο S_{541} ο S_{542} ο S_{543} ο S_{544} ο S_{545} ο S_{546} ο S_{547} ο S_{548} ο S_{549} ο S_{550} ο S_{551} ο S_{552} ο S_{553} ο S_{554} ο S_{555} ο S_{556} ο S_{557} ο S_{558} ο S_{559} ο S_{560} ο S_{561} ο S_{562} ο S_{563} ο S_{564} ο S_{565} ο S_{566} ο S_{567} ο S_{568} ο S_{569} ο S_{570} ο S_{571} ο S_{572} ο S_{573} ο S_{574} ο S_{575} ο S_{576} ο S_{577} ο S_{578} ο S_{579} ο S_{580} ο S_{581} ο S_{582} ο S_{583} ο S_{584} ο S_{585} ο S_{586} ο S_{587} ο S_{588} ο S_{589} ο S_{590} ο S_{591} ο S_{592} ο S_{593} ο S_{594} ο S_{595} ο S_{596} ο S_{597} ο S_{598} ο S_{599} ο S_{600} ο S_{601} ο S_{602} ο S_{603} ο S_{604} ο S_{605} ο S_{606} ο S_{607} ο S_{608} ο S_{609} ο S_{610} ο S_{611} ο S_{612} ο S_{613} ο S_{614} ο S_{615} ο S_{616} ο S_{617} ο S_{618} ο S_{619} ο S_{620} ο S_{621} ο S_{622} ο S_{623} ο S_{624} ο S_{625} ο S_{626} ο S_{627} ο S_{628} ο S_{629} ο S_{630} ο S_{631} ο S_{632} ο S_{633} ο S_{634} ο S_{635} ο S_{636} ο S_{637} ο S_{638} ο S_{639} ο S_{640} ο S_{641} ο S_{642} ο S_{643} ο S_{644} ο S_{645} ο S_{646} ο S_{647} ο S_{648} ο S_{649} ο S_{650} ο S_{651} ο S_{652} ο S_{653} ο S_{654} ο S_{655} ο S_{656} ο S_{657} ο S_{658} ο S_{659} ο S_{660} ο S_{661} ο S_{662} ο S_{663} ο S_{664} ο S_{665} ο S_{666} ο S_{667} ο S_{668} ο S_{669} ο S_{670} ο S_{671} ο S_{672} ο S_{673} ο S_{674} ο S_{675} ο S_{676} ο S_{677} ο S_{678} ο S_{679} ο S_{680} ο S_{681} ο S_{682} ο S_{683} ο S_{684} ο S_{685} ο S_{686} ο S_{687} ο S_{688} ο S_{689} ο S_{690} ο S_{691} ο S_{692} ο S_{693} ο S_{694} ο S_{695} ο S_{696} ο S_{697} ο S_{698} ο S_{699} ο S_{700} ο S_{701} ο S_{702} ο S_{703} ο S_{704} ο S_{705} ο S_{706} ο S_{707} ο S_{708} ο S_{709} ο S_{710} ο S_{711} ο S_{712} ο S_{713} ο S_{714} ο S_{715} ο S_{716} ο S_{717} ο S_{718} ο S_{719} ο S_{720} ο S_{721} ο S_{722} ο S_{723} ο S_{724} ο S_{725} ο S_{726} ο S_{727} ο S_{728} ο S_{729} ο S_{730} ο S_{731} ο S_{732} ο S_{733} ο S_{734} ο S_{735} ο S_{736} ο S_{737} ο S_{738} ο S_{739} ο S_{740} ο S_{741} ο S_{742} ο S_{743} ο S_{744} ο S_{745} ο S_{746} ο S_{747} ο S_{748} ο S_{749} ο S_{750} ο S_{751} ο S_{752} ο S_{753} ο S_{754} ο S_{755} ο S_{756} ο S_{757} ο S_{758} ο S_{759} ο S_{760} ο S_{761} ο S_{762} ο S_{763} ο S_{764} ο S_{765} ο S_{766} ο S_{767} ο S_{768} ο S_{769} ο S_{770} ο S_{771} ο S_{772} ο S_{773} ο S_{774} ο S_{775} ο S_{776} ο S_{777} ο S_{778} ο S_{779} ο S_{780} ο S_{781} ο S_{782} ο S_{783} ο S_{784} ο S_{785} ο S_{786} ο S_{787} ο S_{788} ο S_{789} ο S_{790} ο S_{791} ο S_{792} ο S_{793} ο S_{794} ο S_{795} ο S_{796} ο S_{797} ο S_{798} ο S_{799} ο S_{800} ο S_{801} ο S_{802} ο S_{803} ο S_{804} ο S_{805} ο S_{806} ο S_{807} ο S_{808} ο S_{809} ο S_{810} ο S_{811} ο S_{812} ο S_{813} ο S_{814} ο S_{815} ο S_{816} ο S_{817} ο S_{818} ο S_{819} ο S_{820} ο S_{821} ο S_{822} ο S_{823} ο S_{824} ο S_{825} ο S_{826} ο S_{827} ο S_{828} ο S_{829} ο S_{830} ο S_{831} ο S_{832} ο S_{833} ο S_{834} ο S_{835} ο S_{836} ο S_{837} ο S_{838} ο S_{839} ο S_{840} ο S_{841} ο S_{842} ο S_{843} ο S_{844} ο S_{845} ο S_{846} ο S_{847} ο S_{848} ο S_{849} ο S_{850} ο S_{851} ο S_{852} ο S_{853} ο S_{854} ο S_{855} ο S_{856} ο S_{857} ο S_{858} ο S_{859} ο S_{860} ο S_{861} ο S_{862} ο S_{863} ο S_{864} ο S_{865} ο S_{866} ο S_{867} ο S_{868} ο S_{869} ο S_{870} ο S_{871} ο S_{872} ο S_{873} ο S_{874} ο S_{875} ο S_{876} ο S_{877} ο S_{878} ο S_{879} ο S_{880} ο S_{881} ο S_{882} ο S_{883} ο S_{884} ο S_{885} ο S_{886} ο S_{887} ο S_{888} ο S_{889} ο S_{890} ο S_{891} ο S_{892} ο S_{893} ο S_{894} ο S_{895} ο S_{896} ο S_{897} ο S_{898} ο S_{899} ο S_{900} ο S_{901} ο S_{902} ο S_{903} ο S_{904} ο S_{905} ο S_{906} ο S_{907} ο S_{908} ο S_{909} ο S_{910} ο S_{911} ο S_{912} ο S_{913} ο S_{914} ο S_{915} ο S_{916} ο S_{917} ο S_{918} ο S_{919} ο S_{920} ο S_{921} ο S_{922} ο S_{923} ο S_{924} ο S_{925} ο S_{926} ο S_{927} ο S_{928} ο S_{929} ο S_{930} ο S_{931} ο S_{932} ο S_{933} ο S_{934} ο S_{935} ο S_{936} ο S_{937} ο S_{938} ο S_{939} ο S_{940} ο S_{941} ο S_{942} ο S_{943} ο S_{944} ο S_{945} ο S_{946} ο S_{947} ο S_{948} ο S_{949} ο S_{950} ο S_{951} ο S_{952} ο S_{953} ο S_{954} ο S_{955} ο S_{956} ο S_{957} ο S_{958} ο S_{959} ο S_{960} ο S_{961} ο S_{962} ο S_{963} ο S_{964} ο S_{965} ο S_{966} ο S_{967} ο S_{968} ο S_{969} ο S_{970} ο S_{971} ο S_{972} ο S_{973} ο S_{974} ο S_{975} ο S_{976} ο S_{977} ο S_{978} ο S_{979} ο S_{980} ο S_{981} ο S_{982} ο S_{983} ο S_{984} ο S_{985} ο S_{986} ο S_{987} ο S_{988} ο S_{989} ο S_{990} ο S_{991} ο S_{992} ο S_{993} ο S_{994} ο S_{995} ο S_{996} ο S_{997} ο S_{998} ο S_{999} ο S_{1000}

Έστω $\{N(t)\}$ η ε.δ. των αφίξεων των πελατών

S_1, S_2, \dots οι χρόνοι αφίξεων

και Y_1, Y_2, \dots οι χρόνοι εξυπηρέτησης

Αρα μπορεί να ορίσω

$$N_1(x) = \# \text{ καταχ. πελατών στο } (0, x]$$

όπου ένας πελάτης καταγράφεται αν θα είναι παρών τη στιγμή t με μας ενδιαφέρει.

$$\text{Τότε } N(t) = N_1(t)$$

Τότε η $\{N_t(x)\}$ είναι ένα οικογενειακό β.δ. Poisson με συνάρτηση πυθμού:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \lambda \cdot p(\text{καταγραφής γεγονός που συμβαίνει τη στιγμή } x) \\ &= \lambda \cdot p(x + \text{χρονος εγών} > t) \\ &= \lambda \cdot P(\text{χρονος εγών} > t - x) \\ &= \lambda(1 - G(t - x)) \end{aligned}$$

$$M(t) = N_t(t)$$

$$\text{Άρα } M(t) \sim \text{Poisson} \left(\underbrace{\int_0^t \lambda(t-x) dx}_{\Lambda(t)} \right)$$

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\Lambda(t)} \cdot \Lambda(t)^n}{n!}$$

$$\text{και } E[N(t)] = \Lambda(t) = \lambda \int_0^t (1 - G(t-x)) dx$$

Τι θα συμβαίνει για $t \rightarrow \infty$;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (1 - G(t-x)) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda \int_0^t (1 - G(u)) du = \lambda \cdot E[\text{χρονος εγών}]$$

Δηλαδή, αν σε ένα πάρτυ έχουμε 20 αφίξεις την ώρα και ο

μέσος χρ. παραμονής είναι 3 ώρες τότε:

$$E[\text{παρόντων προσκεκλημένων}] = 60.$$

4. Έστω $\{N(t)\}$ β.δ. Poisson πυθμού λ , και Y_1, Y_2, \dots ανεξ. & ίσων με $P(Y_i = n) = (1-p)p^n$, $n \geq 0$ (γεωμετρική κατανομή) και $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$. Να βρεθούν:

$$E[Y(t)]; \text{Var}[Y(t)]; \text{Cov}[Y(t), Y(s)]$$

$$E[Y(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) E\left[\sum_{i=1}^n Y_i \mid N(t) = n \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t) = n) \cdot n \cdot E[Y_i]$$

$$= E[N(t)] \cdot E[Y_i]$$

$Y_i, N(t)$ ανεξ.