23|3|2016

Μη ομογενής διαδικασία Poisson

Ορισμός μη ομογενούς διαδ. Poisson

Μια απαριθμήτρια γεγονότων σ.δ. $\{N(t)\}$ ($N(t) \in \{0,1,\ldots\}$, $N(t)\nearrow$) λέγεται μη-ομογενής σ.δ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ αν:

(i) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

(ii) $P(N(t+h)-N(t)=n) = \begin{cases} 1-\lambda(t)h+o(h), & n=0 \\ \lambda(t)h+o(h), & n=1 \\ o(h), & n\geq 2 \end{cases}$ όπου $\lim_{h\to 0^+} \frac{o(h)}{h}=0$

Κατανομή $N(t)$ για μη ομογενή σ.δ. Poisson

Θεωρ: Αν $\{N(t)\}$ μη ομογ. διαδ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ τότε για κάθε $t>0$

$$\boxed{N(t) \sim \text{Poisson}\left(\int_0^t \lambda(u)\,du\right)}$$

Απόδειξη

Όμοια με την αποδ Ορσ III => Ορσ II στην κλασσική σ.δ. Poisson

(*)

Βασική πηγή μη ομογενών σ.δ. Poisson

Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ. και κάθε γεγονός της καταγράφεται με πιθανότητα $p(t)$ αν έχει συμβεί τη στιγμή t και

$N_1(t) = \#$ καταγ. γεγονότων στο $(0,t]$

τότε η $\{N_1(t)\}$ είναι μη-ομογ σ.δ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)=\lambda p(t)$

$N_1(t) \sim \text{Poisson}\left(\lambda \int_0^t p(u)\,du\right)$

(*) Επίσης, $N(t+s)-N(s) \sim \text{Poisson}\left(\int_s^{t+s} \lambda(u)\,du\right)$

Σύνθετη διαδικασία Poisson

Ορισμός σύνθετης σ.δ. Poisson

Αν $\{N(t)\}$ είναι σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξ ισονομες τ.μ. με κατανομή $G(x) = P(Y_i \leq x)$ τότε η $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ λέγεται σύνθετη σ.δ. Poisson ρυθμού λ και με συνάρτηση κατανομής "μεγέθους" γεγονότων $G(x)$.

Τι μπορεί να είναι τα Y_i;

πχ. το $N(t)$ μετρούν τα πλήθη των ατυχημάτων και τα Y_i το πλήθος των τραυματιών.

το $N(t)$ δείχνει πόσες παρέες έφτασαν σε ένα εστιατόριο μέχρι την χρονική στιγμή t και το Y_i το μέγεθος της παρέας.

Ασκήσεις

1. Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής σδ. Poisson με συν. ρυθμού $\lambda(t)$

S_n = χρόνος n-οστού γεγονότος ν;

$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x)$ $\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$ SOS

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = P(N(x) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(N(x) = k)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(x)} \cdot \frac{(\Lambda(x))^k}{k!}, \quad \text{όπου } \Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u)du$$

Αν μας ενδιαφέρει η σ.π.π της S_n:

$$f_{S_n}(x) = F'_{S_n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} -\lambda(x) \cdot e^{-\Lambda(x)} \frac{(\Lambda(x))^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\Lambda(x)} \frac{\cancel{k}(\Lambda(x))^{k-1} \lambda(x)}{\cancel{k!}\,(k-1)!}$$

$$= \lambda(x) \cdot \frac{\Lambda(x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\Lambda(x)}, \quad x > 0$$

Για $\lambda(x)=\lambda$ (ομογ. σ.δ. Poisson):

$$f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0$$

η γνωστή σ.π.π της Erlang(n,λ)

2. Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογ. σ.δ. Poisson με συν. ρυθμού λ, και S_1 ο χρόνος του $1^{ου}$ γεγονότος.

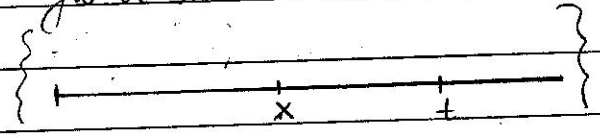
$$(S_1 \mid N(t)=1) \sim \;;$$

$$F_{S_1|N(t)=1}(x) = P(S_1 \leq x \mid N(t)=1)$$

(στην ομογενή βγαίνει ομοιόμορφη, εδώ λογικά δεν θα είναι. Περιμένω τα γεγονότα να είναι πιο πιθανό να συμβούν εκεί που ο ρυθμός είναι μεγαλύτερος)

Για $x \in [0,t]$:

(όταν μπλέκεται S_i & N_i ή τα μεταφρ
ζω σε X_i ή σε N_i



$$F_{S_1|N(t)=1}(x) = P(S_1 \leq x \mid N(t)=1)$$

$$= P(N(x) \geq 1 \mid N(t)=1)$$

$$= \frac{P(N(x)=1,\, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{x\leq t}{=} \frac{P(N(x)=1,\, N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$\overset{\text{ανεξ. προσ.}}{=} \frac{P(N(x)=1)\, P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$

Έστω $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(u)\,du$ τότε:

$$F_{S_1|N(t)=1}(x) = \frac{\cancel{e^{-\Lambda(x)}} \frac{\Lambda(x)^1}{1!}\, \cancel{e^{-(\Lambda(t)-\Lambda(x))}} \frac{(\Lambda(t)-\Lambda(x))^0}{0!}}{\cancel{e^{-\Lambda(t)}} \frac{\Lambda(t)^1}{1!}}$$

$$= \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}, \quad 0 \leq x \leq t$$

Για την σ.π.π:

$$f_{S_1|N(t)=1}(x) = \frac{\lambda(x)}{\Lambda(t)} \quad 0 \leq x \leq t$$

Στην κλασσική σ.δ. Poisson:

$$f_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = \frac{\lambda}{\lambda t} = \frac{1}{t} \quad 0 \le x \le t \quad (\text{ομοιόμορφη})$$

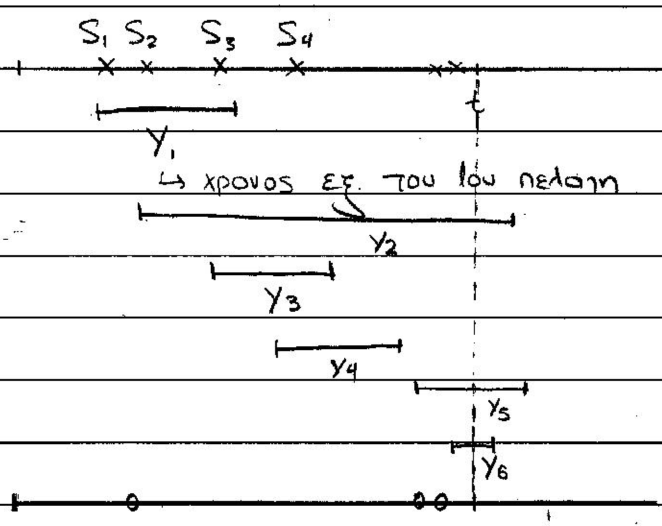
SOS **3. Η $M/G/\infty$ ουρά:**

Πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης σύμφωνα με σ.δ. Poisson ρυθμού λ. Ο καθένας αρχίζει να εξυπηρετείται με την άφιξή του στο σύστημα και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξ. τ.μ. με κατανομή $G(x)$. Έστω,

$M(t)$ = # παρόντων πελατών τη στιγμή t.

$P(M(t)=n) = ;$

$E[M(t)] = ;$



Διαδ. αφίξεων Poisson ρυθμού λ

θέλουμε να βρούμε πόσοι είναι αυτοί που έχουν μείνει μέχρι την χρονική στιγμή t. Εδώ είναι ο 2ος, ο 5ος, ο 6ος πελάτης.

$N_1(t)$

Έστω $\{N(t)\}$ η σ.δ. των αφίξεων των πελατών

$S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι αφίξεων

και $Y_1, Y_2, \ldots$ οι χρόνοι εξυπηρέτησης

Άρα μπορώ να ορίσω,

$N_1(x)$ = # καταγ. πελατών στο $(0, x]$

όπου ένας πελάτης καταγράφεται αν θα είναι παρών τη στιγμή t που μας ενδιαφέρει.

Τότε $M(t) = N_1(t)$

Τότε η $\{N_1(x)\}$ είναι μη ομογενής σ.δ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού:

$$\lambda(x) = \lambda \cdot p(\text{καταγραφής πελάτη που συμβαίνει τη στιγμή } x)$$
$$= \lambda \cdot p(x + \text{χρόνος εξυπ} > t)$$
$$= \lambda \cdot P(\text{χρόνος εξυπ.} > t - x)$$
$$= \lambda(1 - G(t-x))$$

$N(t) = N_1(t)$

Άρα $N(t) \sim \text{Poisson}\Big(\underbrace{\int_0^t \lambda(1-G(t-x))dx}_{\Lambda(t)}\Big)$

$$P(N(t)=n) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)}{n!}$$

και $E[N(t)] = \Lambda(t) = \lambda \int_0^t (1-G(t-x))dx$

Τι θα συμβαίνει για $t \to \infty$;

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t (1-G(t-x))dx = \lim_{t\to\infty} \lambda \int_0^t (1-G(u))du = \lambda E[\text{χρόνος εξυπ}]$$

Δηλαδή, αν σε ένα πάρτυ έχουμε 20 αφίξεις την ώρα και ο μέσος χρ. παραμονής είναι 3 ώρες τότε:

$E[\text{παρόντων προσκεκλημένων}] = 60.$

4. Έστω $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ και $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξ. & ισον με $P(Y_i = n) = (1-p)p^n$, $n \geq 0$ (γεωμετρική κατανομή) και $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$. Να βρεθούν:

$E[Y(t)]$; $Var[Y(t)]$, $Cov[Y(t), Y(s)]$

Y_i, $N(t)$ ανεξ.

$$E[Y(t)] = E\Big[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\Big] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n)\, E\Big[\sum_{i=1}^{n} Y_i \,\Big|\, \cancel{N(t)=n}\Big]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot n \cdot E[Y_i]$$
$$= E[N(t)] \cdot E[Y_i]$$