Μάθημα: 22ο 20/6/2012

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Φυλλάδιο 6 / Άσκηση 4

Χρόνος ζωής $\sim Exp(\lambda)$

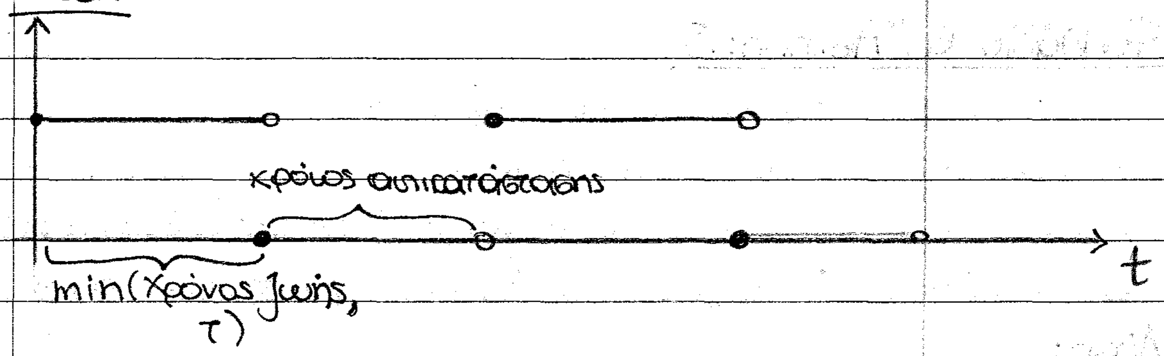
Αντικατάσταση: Αν χαλάσει ή όταν φτάσει σε ηλικία T (T σταθερά)

Χρόνος αντικατάστασης $\sim Gamma(r, \mu)$

$N(t) = \#$ μηχανημ. ως τη στιγμή t.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N(t)}{t} = ;$

Λύση:



Η $\{N(t)\}$ είναι αναν. διαδικασία κι ένας τυπικός ενδιάμεσος χρόνος έχει τη μορφή:

$$S = \min(X, T) + Y$$

όπου $X \sim Exp(\lambda)$

$Y \sim Gamma(r, \mu)$

Ξέρουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{E[S]} \quad (\Sigma A \Theta)$$

Άρα αρκεί να βρούμε το $\tau = E[S]$

$$\tau = E[S] = E[\min(X,T)] + \underbrace{E[Y]}_{\frac{r}{\mu}}$$

Επίσης, $E[\min(X,T)] = \int_0^\infty (1 - F_{\min(X,T)}(t))\,dt =$

$$= \int_0^\infty P(\min(X,T) > t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty P(X>t, T>t)\,dt$$

$$= \int_0^T P(X>t, T>t)\,dt + \int_T^\infty P(X>t, T>t)\,dt$$

$$= \int_0^T P(X>t)\,dt + \int_T^\infty 0\,dt$$

$$= \int_0^T e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}.$$

<u>Άρα</u>: $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}}$

② <u>Φυλλάδιο 6 / Άσκηση: 5</u>

Λεωφορειάκια → Αναχωρούν μόλις γεμίσουν

Χωρητικότητα λεωφ. → N επιβάτες

Πελάτες φτάνουν σύμφωνα με διαδ. Poisson με ρυθμό λ πελ./λεπτό

Μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός λεωφορείων σε μια ώρα =;

<u>Λύση</u>:

×: άφιξη πελάτη

•: αναχώρηση λεωφορείου

Άρα $N(t)$ = # λεωφ. που έχουν αναχωρήσει ως τη στιγμή t

Η $\{N(t)\}$ είναι αναν. διαδ. με κατανομή ενδιαμ. χρόνων Gamma(N,λ) σε λεπτά.

Ζητούμενο $= \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\tau}$ → μέσος χρόνος ανανέωσης σε ώρες

$\tau = \underbrace{\frac{N}{\lambda}}_{\text{μέση τιμή Gamma}(N,\lambda)}$ λεπτά $= \frac{N}{60\lambda}$ ώρες

<u>Άρα</u>: Ζητούμενο $= \dfrac{60\lambda}{N}$.

③ Φυλλάδιο: 7 | Άσκηση: 1

$\{N(t)\}$ ανάν. διαδ.

$G(t)$: κατανομή ενδιάμ. χρόνων

τ : μέση τιμή » »

σ^2 : διασπορά » »

$M(t) = E[N(t)]$ ανάν. συνάρτηση

$H(t) = M(t) - \dfrac{t}{\tau}, \quad t \geq 0 \quad (1)$

α) Να διατυπωθεί ανάν. εξίσωση για την $H(t)$ και να λυθεί

β) $\lim\limits_{t \to \infty} \left(M(t) - \dfrac{t}{\tau}\right) = \,;$

Λύση:

α) $H(t) = E\left[N(t) - \dfrac{t}{\tau}\right] = \int_0^\infty E\left[N(t) - \dfrac{t}{\tau} \,\middle|\, S_1 = x\right] dG(x)$

χρόνος 1ης ανανέωσης

$$E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\middle|\, S_1 = x\right] = \begin{cases} -\dfrac{t}{\tau} \leftarrow \left(0 - \dfrac{t}{\tau}\right), & x > t \\ 1 + M(t-x) - \dfrac{t}{\tau}, & x \leq t \end{cases} =$$

$$\overset{(1)}{=} \begin{cases} -\dfrac{t}{\tau}, & x > t \\ 1 + H(t-x) + \dfrac{\cancel{t} - x}{\tau} - \dfrac{\cancel{t}}{\cancel{\tau}}, & x \leq t \end{cases}$$

Άρα: $H(t) = \int_t^\infty -\dfrac{t}{\tau}\, dG(x) + \int_0^t \left(1 + H(t-x) - \dfrac{x}{\tau}\right) dG(x)$

Ανανεωτική Εξίσωση $\longrightarrow$ $= \underbrace{\int_t^\infty -\dfrac{t}{\tau}\, dG(x) + \int_0^t \left(1 - \dfrac{x}{\tau}\right) dG(x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$

Λύση ανάν. εξίσωσης

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dG(x)$$

Όμως:

$D(t) = \int_t^\infty -\dfrac{t}{\tau}\, dG(x) + \int_0^t \left(1 - \dfrac{x}{\tau}\right) dG(x) =$

$= -\dfrac{t}{\tau}\left(1 - G(t)\right) + G(t) - \dfrac{1}{\tau} \int_0^t x\, dG(x)$

$$= -\frac{t}{\tau}(1-G(t)) + G(t) - \frac{1}{\tau}\left([x\cdot G(x)]_{x=0}^{t} - \int_0^t G(x)dx \right)$$

$$= -\frac{t}{\tau} + \cancel{\frac{tG(t)}{\tau}} + G(t) - \cancel{\frac{tG(t)}{\tau}} + \frac{1}{\tau}\int_0^t G(x)dx$$

$$= G(t) - \frac{1}{\tau}\int_0^t (1-G(x))dx$$

$$= \underbrace{G(t) - 1} + \underset{=\frac{\tau}{\tau}}{1} - \frac{1}{\tau}\int_0^t (1-G(x))dx$$

$$= -\underbrace{(1-G(t))}_{\substack{\text{φθίνουσα} \\ \text{ως προς } t \\ = \\ D_2(t)}} + \underbrace{\frac{1}{\tau}\int_t^\infty (1-G(x))dx}_{\substack{\text{φθίνουσα} \\ \text{ως προς } t \\ = \\ D_1(t)}}$$

Θα πρέπει να τσεκάρω ότι:

$$\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty D_1(t)dt + \int_0^\infty D_2(t)dt < \infty .$$

και τότε:

$$\lim_{t\to\infty}\left(U(t) - \frac{t}{\tau}\right) = \lim_{t\to\infty} H(t) \overset{\text{ΒΑΘ}}{=} \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{\tau}$$

Έχω:

$$\int_0^\infty D_1(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(x))dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_t^\infty \int_x^\infty dG(u) \quad dx\,dt$$

$$\overset{0\le t\le x\le u}{=} \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_0^u \int_0^x dt\,dx\,dG(u)$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_0^u x\,dx\,dG(u) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{u^2}{2}dG(u)$$

$$= \frac{1}{2\tau}\underbrace{\int_0^\infty u^2 dG(u)}_{\substack{\text{μέση τιμή του} \\ \text{(ενδιάμ. χρόνου)}^2}} = \frac{1}{2\tau}(\tau^2+\sigma^2)$$

$$\int_0^\infty D_2(t)dt = \int_0^\infty (1-G(t))dt = \tau$$

Άρα: $\int_0^\infty |D(t)|dt = \frac{1}{2\tau}(\tau^2+\sigma^2)+\tau < \infty$.

και $\lim_{t\to\infty}\left(M(t)-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{\int_0^\infty D_1(t)dt - \int_0^\infty D_2(t)dt}{\tau} =$

$$= \frac{\tau^2+\sigma^2-2\tau^2}{2\tau^2} = \frac{\sigma^2-\tau^2}{2\tau^2}.$$

(4) Φυλλάδιο: 7 / Άσκηση: 2

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ.

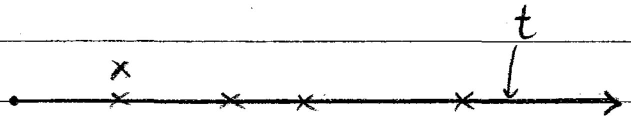
$G(t)$ κατανομή ενδιαμ. χρόνων

$H(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$

Ανανεωτ. εξίσωση για την $H(t)$ =;

Λύση =;

Λύση:



$$H(t) = E[N(t)(N(t)-1)] = \int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1)\,|\,S_1=x]\,dG(x)$$

Όμως:

$$E[N(t)(N(t)-1)\,|\,S_1=x] = \begin{cases} 0 & , x>t \\ E[(1+N(t-x))N(t-x)] & , x\le t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , x>t \\ E[N(t-x)]+E[(N(t-x))^2] & , x\le t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , x>t \\ 2E[N(t-x)]+E[N(t-x)(N(t-x)-1)] & , x\le t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , x>t \\ 2M(t-x)+H(t-x) & , x\le t \end{cases}$$

Άρα: $H(t) = \int_0^t (2M(t-x)+H(t-x))\,dG(x)$

$$= \underbrace{2\int_0^t M(t-x)\,dG(x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$$ Ανανεωτική Συνάρτηση

Αναν. εξίσ. για αναν. συν/ση $M(t)=G(t)+(G*M)(t)$

Όμως: $D(t)=2\int_0^t M(t-x)\,dG(x) = 2(M(t)-G(t))$

Η λύση είναι:

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-x)\,dM(x)$$

$$=2M(t)-2G(t)+2\int_0^t M(t-x)\,dM(x)-2\underbrace{\int_0^t G(t-x)\,dM(x)}_{M(t)*G(t)\,=\,M(t)-G(t)}$$

$$=2\int_0^t M(t-x)\,dM(x)=2M^{(*2)}(t)$$

5 Φυλλάδιο 7 / 1η Άσκηση: 3

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ.

$G(t)$ κατανομή ενδιάμεσων χρόνων

$H(t) = P(N(t)$ περιττός$)$

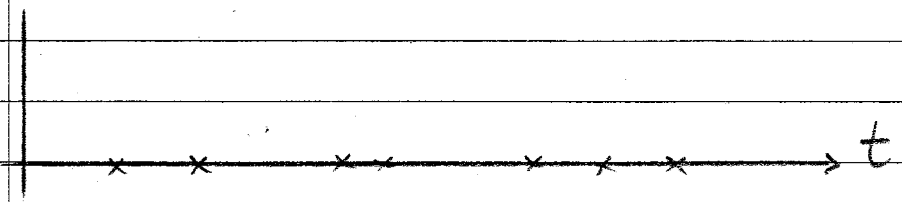
1) Αναν. εξ. για την $H(t)$

2) Λύση

3) Ειδική λύση όταν $\{N(t)\}$ Poisson

4) $\lim_{t\to\infty} H(t) =\,;$

Λύση:



1) Αν δεσμεύσω στο 1ο γεγονός

$P(N(t)$ περ$) = \int_0^\infty P(N(t)$ περ $\mid S_1=x)\,dG(x)$

$$P(N(t)\text{ περ}\mid S_1=x)=\begin{cases}0, & t<x\\ \underbrace{P(N(t-x)\text{ άρτιος})}_{1-H(t-x)}, & x\le t\end{cases}$$

Άρα:

$$H(t)=\int_0^t (1-H(t-x))\,dG(x)=\underbrace{G(x)-\int_0^t H(t-x)\,dG(x)}$$

που δεν είναι αναν. εξίσ. επειδή έχουμε πλην

Για να προκύψει ανανεωτική εξίσωση δεσμεύω στο 2° χρόνο

$$P(N(t)\ \text{περ.}) = \int_0^\infty P(N(t)\ \text{περ.} \mid S_2 = x)\, d\,G^{(*2)}(x)$$

$$P(N(t)\ \text{περ.} \mid S_2 = x) = \begin{cases} P(N(t)\ \text{περ.} \mid S_2 = x), & x > t \\ P(N(t-x)\ \text{περ.}), & x \le t \end{cases}$$

Άρα: $H(t) = P(N(t)\ \text{περ.})$

έχω: $H(t) = \int_t^\infty P(N(t)\ \text{περ.} \mid S_2 = x)\, d\,G^{(*2)}(x)$

$$+ \int_0^t H(t-x)\, d\,G^{(*2)}(x)$$

$$D(t) = \int_t^\infty P(N(t)\ \text{περ} \mid S_2 = x)\, d\,G^{(*2)}(x)$$

$$= \int_t^\infty P(S_1 \le t < S_2 \mid S_2 = x)\, d\,G^{(*2)}(x)$$

$$= P(S_1 \le t < S_2,\ S_2 > t) = P(S_1 \le t < S_2) = G(t) - G^{(*2)}(t)$$

κτλ ...

Δομή Θεμάτων

ΘΕΜΑ 1° : Μοντελοποίηση / Απλοί Υπολογισμοί Poisson

ΘΕΜΑ 2° : Poisson Τεχνικοί Υπολογισμοί

ΘΕΜΑ 3° : Μοντελοποίηση σε Αναν. Θεωρία / ΣΑΘ / Βασικοί Υπολογισμοί.

ΘΕΜΑ 4° : Ανανεωτική Εξίσωση, Λύση, Οριακή Τιμή