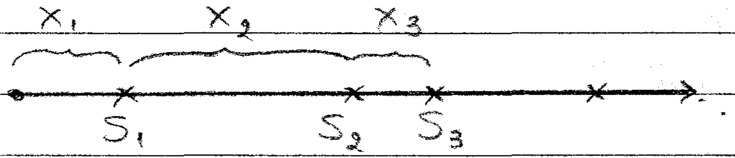
Μάθημα: 17ο

28/5/2012

Ανανεωτική Θεωρία
Γενικές Ανανεωτικές Διαδικασίες
Εφαρμογές

① Γενική Ανανεωτική Διαδικασία



$X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες ς' $X_1, X_2, X_3, \ldots \geq 0$

$X_2, X_3, \ldots$ ισόνομες, δηλ. $X_1 \sim F(x)$

$X_2, X_3, \ldots \sim G(x)$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$: χρόνος n-οστού γεγονότος

$N(t) = \#$ γεγονότων ως τη στιγμή t

$\{N(t)\}$ γενική ανανεωτική διαδικασία με κατανομή χρόνου 1ου γεγονότος $F(x)$ και κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(x)$.

② Βασικοί Υπολογισμοί

1) $$F_{S_n}(x) = P(S_n \leq x) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq x) = (F * \underbrace{G * G * \ldots * G}_{n-1})(x) = (F * G^{*(n-1)})(x)$$

2) $$p_n(t) = P(N(t)=n) = P(S_n \leq t < S_{n+1}) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) = (F * G^{*(n-1)})(t) - (F * G^{*n})(t), \quad n \geq 1.$$

$$p_0(t) = P(N(t)=0) = P(S_1 > t) = 1 - F(t)$$

3) $$M(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[1_{\{S_n \leq t\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} (F * G^{*(n-1)})(t).$$

4) $$\check{F}_{S_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_{S_n}(t) = \tilde{F}(s)\,\tilde{G}(s)^{n-1}$$

5) $$\tilde{p}_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dp_n(t) = \tilde{F}(s)\tilde{G}(s)^{n-1} - \tilde{F}(s)\tilde{G}(s)^{n}, \quad n \geq 1$$

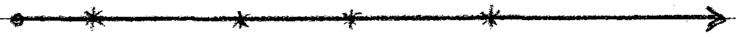
$$\tilde{p}_0(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dp_0(t) = 1 - \tilde{F}(s)$$

6) $\tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dM(t) = \dfrac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$

③ Επαναληπτικότητα-Παροδικότητα Ανανεωτικής Διαδικασίας

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = P(X_1 < \infty)$$

$$G(\infty) = \lim_{x\to\infty} G(x) = P(X_i < \infty), \quad i \geq 2.$$



1) $F(\infty)\cdot G(\infty) = 1 \Rightarrow P(N(\infty) = \infty) = 1$

2) $F(\infty)\cdot G(\infty) < 1 \Rightarrow P(N(\infty) = \infty) < 1$

Ειδικότερα στην 2) έχουμε:

$P(N(\infty) = 0) = 1 - F(\infty)$

$P(N(\infty) = 1) = F(\infty)(1 - G(\infty))$

$P(N(\infty) = 2) = F(\infty)G(\infty)(1 - G(\infty))$

$\vdots$

$P(N(\infty) = 0) = 1 - F(\infty)$

$P(N(\infty) = n) = F(\infty)G(\infty)^{n-1}(1 - G(\infty)), \quad n \geq 1$

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε γενικές ανανεωτικές διαδικασίες με $F(\infty)\cdot G(\infty) = 1$

και μάλιστα $E[X_1] = \tau_F$, $Var[X_1] = \sigma_F^2 < \infty$

$E[X_i] = \tau$, $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$, $i \geq 2$

④ Σ.Α.Θ. με αμοιβές στη γενική ανανεωτική διαδικασία

Ίδιο πλαίσιο αλλά:

X_n = μήκος n-οστού κύκλου

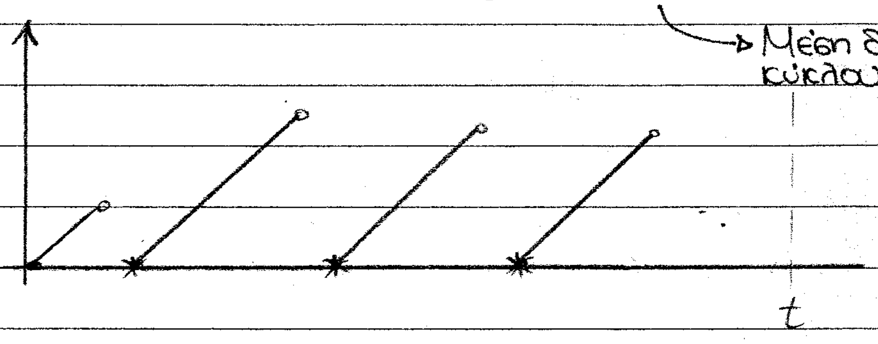
R_n = αμοιβή » » $= R(S_n) - R(S_{n-1})$

(X_n, R_n) ανεξάρτητα $\forall n \geq 1$
ισόνομα $\forall n \geq 2$

Σ.Α.Θ. με αμοιβές: $\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{r}{\tau}$

r → Μέση αμοιβή σε 1 ενδιαμ. χρόνο $= E[R_i], i \geq 2$

τ → Μέση διάρκεια κύκλου $= E[X_i], i \geq 2$



⑤ Τεχνικό Λήμμα

$H(t)$ φραγμένη με $\lim_{t\to\infty} H(t) = \ell < \infty$ και $F(t)$ σ.κ. γνήσιας τ.μ. $(F(\infty)=1)$

Τότε: $\lim_{t\to\infty} \underbrace{(H*F)(t)}_{\int_0^t H(t-u)dF(u)} = \lim_{t\to\infty} H(t) = \ell$

⑥ Άσκηση

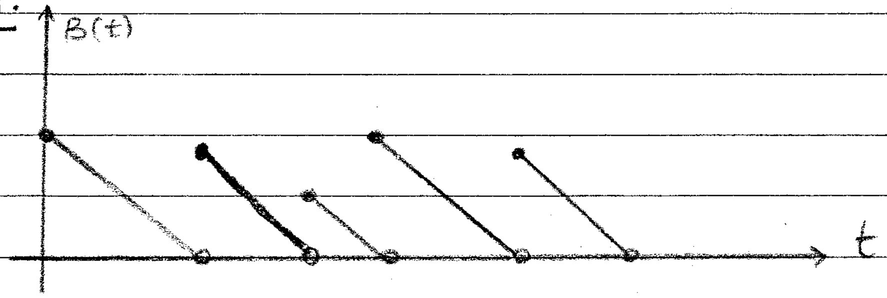
Γενική ανανεωτική διαδικασία με κατανομή χρόνου $1^{ου}$ γεγονότος $F(x)$ και κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(x)$

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$: Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης

$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t B(u)du\right]}{t} = ;$ $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = ;$

(Έχουμε δει ότι για απλή ανανεωτική διαδικασία και τα δύο ισούνται με $\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$)

Λύση:



ΣΑΘ με αμοιβές

$$1)\lim_{t\to\infty}\frac{E[\int_0^t B(u)du]}{t} \overset{\downarrow}{=} \frac{E[R_2]}{E[X_2]=\tau=\int_0^\infty u\,dQ(u)}$$

$$E[R_2]=E\left[\frac{X_2^2}{2}\right]=\frac{E[X_2^2]}{2}=\frac{Var(X_2)+E[X_2]}{2}=\frac{\tau^2+\sigma^2}{2}$$

Άρα είναι $\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$

2) $H(t)=E[B(t)]$

$H(t)=\int_0^\infty E[B(t)/X_1=u]\,dF(u)$

$$E[B(t)|X_1=u]=\begin{cases} u-t & , u>t \\ E[B'(t-u)] & , u\le t \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ υπολειπόμενος χρόνος σε απλή ανανεωτική διαδικασία

Έχουμε: $H(t)=\int_t^\infty (u-t)\,dF(u)+\int_0^t \underbrace{E[B'(t-u)]}_{H'(t-u)}\,dF(u)$

όπου η $H'(t)=E[B'(t)]$ είναι η μέση τιμή του υπολειπόμενου χρόνου τη στιγμή t σε απλή ανανεωτική διαδικασία με κατανομή $G(x)$.

Άρα: $\lim_{t\to\infty}H(t)=\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty (u-t)\,dF(u)+\lim_{t\to\infty}\int_0^t H'(t-u)\,dF(u)$

Έχουμε: $\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty (u-t)\,dF(u)=\lim_{t\to\infty}\left[\int_t^\infty u\,dF(u)-t\cdot\int_t^\infty dF(u)\right]$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\int_0^\infty u\,dF(u)-\int_0^t u\cdot dF(u)-t(1-F(t))\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\tau_F-[uF(u)]_{u=0}^t+\int_0^t F(u)du-t+tF(t)\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\tau_F-t\cancel{F(t)}+\int_0^t F(u)du-t+t\cancel{F(t)}\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\tau_F-\int_0^t(1-F(u))du\right]=0$$

γιατί $\int_0^\infty(1-F(u))du=\tau_F$

Ξέρουμε ότι:

$$\lim_{t\to\infty} H'(t) = \lim_{t\to\infty} E[B'(t)] = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

και άρα από το Τεχνικό Λήμμα

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t H'(t-u)\,dF(u) = \lim_{t\to\infty} H'(t) = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau}$$

(7) **Εφαρμογή 1** (Διαχείριση Αποθήκης)

Αποθήκη.

Φθάνουν προϊόντα σύμφωνα με διαδικασία Poisson(λ)

Η αποθήκη πρόκειται να κάνει συμβαση με τρένο που θα εκκαθαρίζει όλα τα προϊόντα κάθε t χρονικές μονάδες.

k: πληρωμή του τρένου για κάθε εκκαθάριση

h: κόστος αποθήκευσης ανά προϊόν στη μονάδα του χρόνου

1) να υπολογισθεί το μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα για τη λειτουργία της αποθήκης $c(t)$.

2) να βρεθεί το βέλτιστο t^* που να ελαχιστοποιεί την $c(t)$

Λύση:

Ανανεωτικά γεγονότα = επισκέψεις του τρένου

1) $$c(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{E[\text{κόστος που συσσωρεύεται ως τη στιγμή } s]}{s} \overset{\text{ΣΑΘ}}{\underset{\text{με αμοιβές}}{=}}$$

$$= \frac{E[\text{κόστος σε 1 κύκλο}]}{E[\text{διάρκεια 1 κύκλου}]} = \frac{k + hE\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right]}{t}$$

Poisson; S_i → χρόνος άφιξης του i-προϊόντος

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t-S_i)\right] = E[tN(t)] - E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = E[tN(t)] -$$

$$- E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)\right]\right]$$

Αλλά $$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] = \frac{nt}{2}$$

$U_i \sim U([0,t])$

Άρα: $$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t-S_i)\right] = t\cdot E[N(t)] - E\left[\frac{tN(t)}{2}\right] = \frac{t\cdot E[N(t)]}{2} =$$

$$= \frac{t\cdot \lambda t}{2} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

Άρα: $c(t) = \dfrac{k + \frac{\lambda h t^2}{2}}{t} = \dfrac{k}{t} + \dfrac{\lambda h t}{2}$

2) Για το βέλτιστο t

$c'(t) = -\dfrac{k}{t^2} + \dfrac{\lambda h}{2}$

$c''(t) = \dfrac{2k}{t^3} > 0$ (κυρτή)

$c'(t) = 0 \Rightarrow t^* = \sqrt{\dfrac{2k}{\lambda h}}$