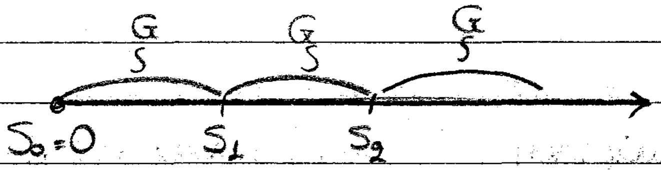
Μάθημα: 11ο 30/4/2012

Ανανεωτική Θεωρία

① Ορισμός

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. ισον. μη αρνητικές τ.μ. με κατανομή $G(t)$ και θέτουμε
$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Η $\{S_n\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία
Αν $N(t) = \sup\{n : S_n \le t\} = \#$ γεγον. ως το t.
Τότε η $\{N(t)\}$ λέγεται ανανεωτική διαδικασία



② Συμβολισμός (Laplace-Stieltjes)

$G(t)$ σ.κ. κατανομής με σ.π. $g(t)$ αν αντιστοιχεί σε διακριτή
$G(t)$ σ.κ. κατανομής με σ.π.π. $g(t)$ συνεχή
και $f(t)$ συνάρτηση
Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dG(t) = \begin{cases} \sum_x f(x) g(x) & \text{διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x)\, dx & \text{συν.} \end{cases}$$

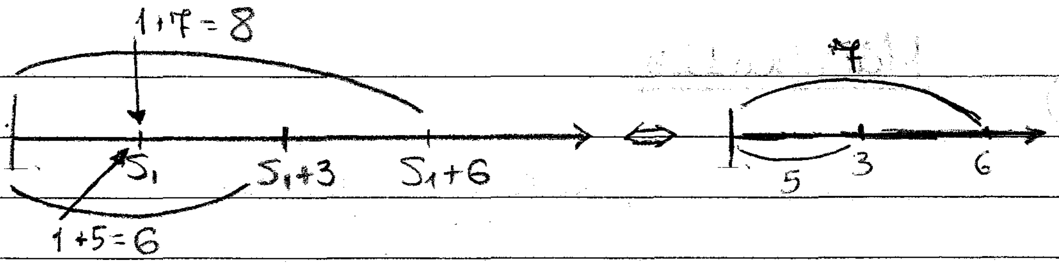
Ειδικά για $f(t) = e^{-st}$, G σ.κ. μη αρνητική τ.μ.

$$\tilde{G}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dG(t)$$

③ Βασικοί Υπολογισμοί

Παρατήρηση
$\{N(t) : t \ge 0\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμη (ίδιες κατανομές) με την $\{N(t+S_1) - 1 : t \ge 0\}$.

π.χ. $P(N(3) = 5,\ N(6) = 7) = P(N(3+S_1) = 6,\ N(6+S_1) = 8)$



- $F_{S_n}(t) = P(S_n \le t) = (\underbrace{G * G * \dots * G}_{n})(t) = G^{*n}(t)$

όπου

$$(G*F)(t) = \int_0^t G(t-x)\,dF(x)$$

συνέλιξη κατανομών

- $p_k(t) = P(N(t)=k) = P(S_k \le t < S_{k+1}) = P(S_k \le t) - P(S_{k+1} \le t)$

$$= G^{*k}(t) - G^{*(k+1)}(t).$$

- $M(t) = E[N(t)]$ = Μέσο πλήθος γεγονότων στο $[0,t]$

ανανεωτική συνάρτηση → δείκτρια συν/ση: $1\{S_n \le t\} = \begin{cases} 1, & \text{αν } S_n \le t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$M(t) = E[N(t)] = E\Big[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{S_n \le t\}\Big]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[1\{S_n \le t\}] = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$$

Άρα θα θυμάστε:

1) $F_{S_n}(t) = G^{*n}(t)$
2) $p_n(t) = G^{*n}(t) - G^{*(n+1)}(t)$
3) $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$.

(4) Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

$$\tilde{F}_{S_n}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dF_{S_n}(t) = \tilde{G}(s)^n$$

$$\tilde{p}_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dp_n(t) = \tilde{G}(s)^n - \tilde{G}(s)^{n+1}$$

$$\tilde{M}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dM(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}(s)^n = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

5 Προσδιορισμός της G(t) από την M(t)

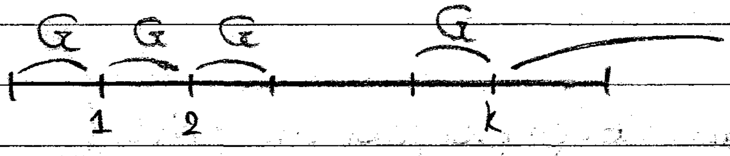
$M(t) \longrightarrow \tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot dM(t)$

$$\longrightarrow \tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

$$\longrightarrow \tilde{M}(s) - \tilde{M}(s)\tilde{G}(s) = \tilde{G}(s)$$

$$\longrightarrow \tilde{G}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{1+\tilde{M}(s)} \longrightarrow G(t)$$

6 Πλήθος Ανανεώσεων στο $(0,+\infty)$



Έστω $G(\infty) = \lim_{t\to\infty} G(t) = P(X_n < \infty)$

Τότε: $G(\infty)=1 \Rightarrow P(N(\infty)=\infty) = 1$

$G(\infty)<1 \Rightarrow P(N(\infty)=k) = G(\infty)^k (1-G(\infty)),\ k=0,1,\ldots$

$$E[N(\infty)] = \frac{G(\infty)}{1-G(\infty)}$$

7 Υπενθυμίσεις από τις Πιθανότητες

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. και ισόνομες

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$E[X_i]=\mu \Rightarrow$ Νόμος Μεγάλων Αριθμών: $\frac{S_n}{n} \to \mu$ με πιθ. 1

$E[X_i]=\mu,\ Var[X_i]=\sigma^2<\infty \Rightarrow$ Κεντρικό Οριακό Θ/μα: $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

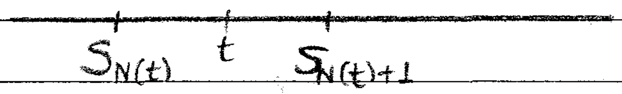
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \le x\right) = \Phi(x)$$

8 Νόμος Μεγάλων Αριθμών για την $\{N(t)\}$.

Θεώρημα

$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$, με πιθανότητα 1, όπου $\tau = E[X_i]$.

Απόδειξη:



Άρα $\dfrac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \dfrac{t}{N(t)} \le \dfrac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$

$$\Rightarrow \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \le \frac{t}{N(t)} \le \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{N(t)}$$

$$\xRightarrow[N.M.A.]{t\to\infty} \tau \le \lim_{t\to\infty}\frac{t}{N(t)} \le \tau\cdot 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} \text{ με πιθ. } 1$$

Διαισθητικά για μεγάλα t $N(t) \simeq \dfrac{t}{\tau}$

9) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα για την $\{N(t)\}$

$$\frac{N(t)-\frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad , \text{ όπου } \tau = E[X_i], \ \sigma^2 = Var[X_i].$$

Απόδειξη:

$$P(N(t)\ge k) = P(S_k \le t) = P\left(\frac{S_k - k\cdot\tau}{\sigma\cdot\sqrt{k}} \le \frac{t-k\tau}{\sigma\cdot\sqrt{k}}\right)$$

Θεωρούμε $k(t)$ τέτοιο ώστε: $k = k(t) \to \infty$ και

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t-k(t)\cdot\tau}{\sigma\cdot\sqrt{k(t)}} = x \quad (2)$$

Άρα: $\lim\limits_{t\to\infty} P(N(t)\ge k(t)) = \Phi(x)$.

Έχω: $P(N(t)\ge k(t)) = P\left(N(t) - \frac{t}{\tau} \ge k(t) - \frac{t}{\tau}\right)$

$$= P\left(N(t) - \frac{t}{\tau} \ge \frac{\tau\cdot k(t) - t}{\tau}\right)$$

Έχω: $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t-k(t)\cdot\tau}{\sigma\cdot\sqrt{k(t)}} = x \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{k(t)}} - \sqrt{k(t)}\,\dfrac{\tau}{\sigma}\right) = x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{t/\cancel{\sigma}\sqrt{k(t)}}{\sqrt{k(t)}\,\frac{\tau}{\cancel{\sigma}}} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{t}{k(t)\cdot\tau} = 1 \quad (1)$$

Από (1), (2) έχω:

$$\frac{\tau\cdot k(t)-t}{\tau}=-\frac{t-\tau\cdot k(t)}{\tau}=-\frac{t-\tau k(t)}{\sigma\sqrt{k(t)}}\cdot\frac{\sigma\sqrt{k(t)}}{\tau}$$

Άρα: $$\frac{\tau\cdot k(t)-t}{\tau\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}}=-\underbrace{\frac{t-\tau\cdot k(t)}{\sigma\cdot\sqrt{k(t)}}}_{\to x}\cdot\underbrace{\frac{\sigma\cdot\sqrt{k(t)}}{\tau\cdot\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}}}_{=\sqrt{\frac{k(t)\tau}{t}}\to 1}\longrightarrow -x\cdot 1=-x$$

Επίσης,
$$P(N(t)\geq k(t))=P\left(\frac{N(t)-\frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}}\geq\frac{\tau k(t)-t}{\tau\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}}\right)$$

Άρα:
$$\lim_{t\to\infty}P\left(\frac{N(t)-\frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}}\geq -x\right)=\Phi(x).$$

Άρα:
$$\lim_{t\to\infty}P\left(\frac{N(t)-\frac{t}{\tau}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}}}\leq x\right)=1-\Phi(-x)=\Phi(x)$$

Διαισθητικά, για μεγάλα t

$$N(t)\simeq N\left(\frac{t}{\tau},\frac{\sigma^2 t}{\tau^3}\right)$$

10 Παράδειγμα

Μια μηχανή λειτουργεί μέχρι να αντικατασταθεί με καινούρια κ.ο.κ.
Μπορεί να είναι δύο τύπων: 1 κ' 2
Ο χρόνος ζωής της είναι $Exp(\frac{1}{8})$ αν είναι τύπου 1
$Exp(\frac{1}{5})$ αν είναι τύπου 2.

$$\text{Χρόνος αντικατάστασης}=\begin{cases}1, & \text{αν τύπου } 1\\ 1/2, & \text{αν τύπου } 2\end{cases}$$

Μια μηχανή είναι τύπου 1 με πιθ. 0,3
2 με πιθ. 0,7.

$N(t) =$ # μηχ. που έχουν μπει σε λειτουργία σε χρόνο t = ;

κατανομή $N(t)$ για μεγάλα t = ;

<u>**Απ:**</u> $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους X_i

$\tau = E[X_i] = 0,3(1+8)+0,7(\frac{1}{2}+5) = 6,55$

$\sigma^2 = V[X_i] = 0,3 \cdot 8^2 + 0,7 \cdot 5^2 = 82,75.$

Για μεγάλα t : $N(t) \simeq N\left(\frac{t}{\tau}, \frac{\sigma^2 t}{\tau^3}\right) = N\left(\frac{t}{6,55}, \frac{82,75t}{6,55^3}\right)$