Μάθημα: 10ο 25/4/2012

Ασκήσεις στη διαδικασία Poisson

(1) η Άσκηση

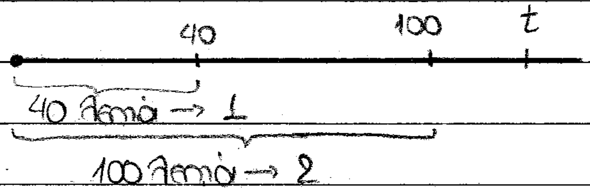
Σε ένα συνεργείο είναι γνωστό ότι αυτοκίνητα φθάνουν για service σύμφωνα με διαδικασία Poisson.

Έχουμε τις πληροφορίες:

1) το 1ο αυτοκίνητο έφτασε μέσα στα πρώτα 40 λεπτά λειτουργίας του συνεργείου
2) το 2ο αυτοκίνητο έφτασε μέσα στα πρώτα 100 λεπτά λειτουργίας του συνεργείου
3) μέχρι τα πρώτα t λεπτά δεν είχε φτάσει άλλο αυτοκίνητο ($t \geq 100$, t γνωστό)

Να βρεθεί ο μέσος χρόνος άφιξης του 1ου αυτοκινήτου δεδομένου της πληροφορίας.

Λύση:



Έστω $\{N(t)\}$ η διαδικασία Poisson αφίξεων των αυτοκινήτων και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι αφίξεων

Έστω λ ο ρυθμός της Poisson

Ζητάμε:

$$E[S_1 \mid S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2] = ; \quad , \ t \geq 100.$$

Θα βρω:

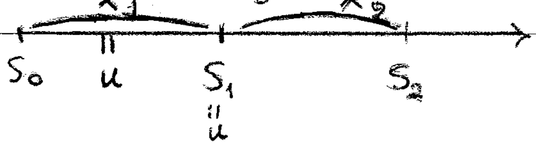
$$P[S_1 \leq x \mid S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2] \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq 40.$$

$$P[S_1 \leq x \mid S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2] = \frac{P(S_1 \leq x, S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2)}{P(S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2)}$$

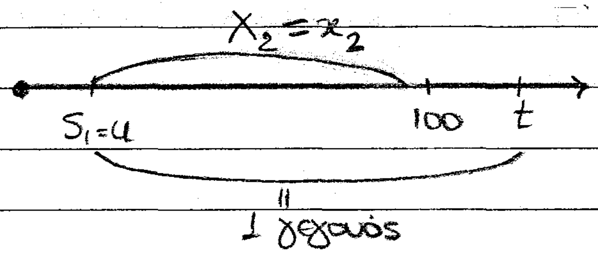
$$= \frac{P(S_1 \leq x, S_2 \leq 100, N(t)=2)}{P(S_1 \leq 40, S_2 \leq 100, N(t)=2)}, \quad 0 \leq x \leq 40.$$

Για τον αριθμητή έχω:

α' τρόπος: $P(S_1 \leq x, S_2 \leq 100, N(t)=2) = \int_0^x P(u + X_2 \leq 100, N(t)-N(u)=1)\, \lambda \cdot e^{-\lambda u} du =$



$$=\int_0^x P(X_2 \le 100-u,\ N(t)-N(u)=1)\,\lambda \cdot e^{-\lambda u}\,du$$



$$=\int_0^x \int_0^{100-u} P(N(t)-N(u+x_2)=0)\cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x_2}\,dx_2\,\lambda \cdot e^{-\lambda u}\,du$$

$$=\int_0^x \int_0^{100-u} e^{-\lambda(t-x_2-u)}\,\lambda \cdot e^{-\lambda x_2}\cdot \lambda \cdot e^{-\lambda u}\,dx_2\,du = \dots$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^x \int_0^{100-u} dx_2\,du = \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^x (100-u)\,du = \lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x-\frac{x^2}{2}\right)$$

<u>Πιο εύκολα:</u>

<u>β' τρόπος:</u> $P(S_1 \le x,\ S_2 \le 100,\ N(t)=2) = P(N(x)\ge 1,\ N(100)\ge 2,\ N(t)=2)$

$x \le 40,\quad 100 \le t$

$$= P(N(x)\ge 1,\ N(100)=2,\ N(t)=2)$$

$$= P(N(x)=1,\ N(100)=2,\ N(t)=2) + P(N(x)=2,\ N(100)=2,\ N(t)=2)$$

$$= P(N(x)=1,\ N(100)-N(x)=1,\ N(t)-N(100)=0) + P(N(x)=2,\ N(100)-N(x)=0,\ N(t)-N(100)=0)$$

$$= e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^1}{1!}\cdot e^{-\lambda(100-x)}\frac{(\lambda(100-x))^1}{1!}\,e^{-\lambda(t-100)}\cdot \frac{(\lambda(t-100))^0}{0!} + e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^2}{2!}\,e^{-\lambda(100-x)}\frac{(\lambda(100-x))^0}{0!}\cdot e^{-\lambda(t-100)}\cdot\frac{(\lambda(t-100))^0}{0!}$$

$$= e^{-\lambda t}\lambda^2\left(x(100-x)+\frac{x^2}{2}\right) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\left(100x-\frac{x^2}{2}\right)$$

<u>Άρα:</u> Ζητούμενη Πιθανότητα $= P(S_1 \le x \mid S_1 \le 40,\ S_2 \le 100,\ N(t)=2) =$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda t}}\cdot \cancel{\lambda^2}\left(x(100-x)+\frac{x^2}{2}\right)}{\cancel{e^{-\lambda t}}\cdot \cancel{\lambda^2}\left(40(100-40)+\frac{40^2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{100x-\frac{x^2}{2}}{40\cdot 80}$$

Επομένως: $E[S_1 \mid S_1 \le 40, S_2 \le 100, N(t)=2] = \int_0^{40} x \cdot \frac{100-x}{3200}\,dx = \ldots$

$= 18{,}33$ λεπτά

γ' τρόπος: $P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2) = P(N(t)=2)\,P(S_1 \le x, S_2 \le 100 \mid N(t)=2)$

$= P(N(t)=2)\,P(U_{1:2} \le x, U_{2:2} \le 100)$

Όμως: $P(U_{1:2} \le x, U_{2:2} \le 100) = \int_0^{x}\int_{x_1}^{100} \frac{2!}{t^2}\,dx_2\,dx_1 =$

$= \frac{2}{t^2}\int_0^{x}(100-x_1)\,dx_1 = \frac{2}{t^2}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right)$

Άρα: $P(S_1 \le x, S_2 \le 100, N(t)=2) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{t^2}}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right)$

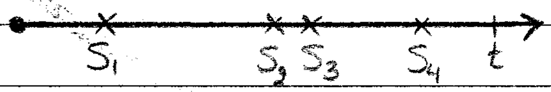
$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda t}\left(100x - \frac{x^2}{2}\right).$

2η Άσκηση

Έστω ότι πελάτες φτάνουν σ' ένα σύστημα σύμφωνα με διαδικασία Poisson(λ). Καθένας πληρώνει στο σύστημα β χρηματικές μονάδες. Θεωρούμε ότι 1 χρηματική μονάδα μετά από χρόνο t αξίζει $e^{-\alpha t}$ σήμερα.

Να υπολογιστεί η παρούσα αξία των πληρωμών που συγκεντρώνονται σε χρόνο t.

π.χ.



$\text{πληρ} = \beta \cdot e^{-\alpha S_1} + \beta \cdot e^{-\alpha S_2} + \beta e^{-\alpha S_3} + \beta \cdot e^{-\alpha S_4}$

χρόνος j-οστού γεγονότος

Poisson

Ζητούμενο: $E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} \beta \cdot e^{-\alpha S_j}\right] = E\left[E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} \beta \cdot e^{-\alpha S_j} \mid N(t)\right]\right] =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(N(t)=n)}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \cdot E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} \beta \cdot e^{-\alpha S_j} \mid N(t)=n\right]$

Όμως:

$E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} \beta \cdot e^{-\alpha S_j} \mid N(t)=n\right] = \beta \cdot E\left[\sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha S_j} \mid N(t)=n\right] =$

$$= \beta \cdot E\left[\sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha U_{j:n}}\right]$$ διατεταγμ. τ.μ. από n ομοιόμ. στο $[0,t]$

$$= \beta \cdot E\left[e^{-\alpha U_{1:n}} + e^{-\alpha U_{2:n}} + \dots + e^{-\alpha U_{n:n}}\right]$$

$$= \beta \cdot E\left[e^{-\alpha U_1} + e^{-\alpha U_2} + \dots + e^{-\alpha U_n}\right]$$

όπου $U_1, U_2, \dots, U_n$ ανεξ. ομοιόμ.

Οπότε:

$$E\left[\sum_{j=1}^{N(t)} \beta \cdot e^{-\alpha S_j} / N(t)=n\right] = \beta \cdot n \cdot E\left[e^{-\alpha U_1}\right] = \beta \cdot n \int_0^t e^{-\alpha u_1} \frac{1}{t} du_1$$

$$= \frac{\beta n}{t} \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

Άρα: $Ζητούμενο = \sum_{n=0}^{\infty} P(N(t)=n) \cdot \frac{\beta n}{t} \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} =$

$$= \frac{\beta(1-e^{-\alpha t})}{\alpha \cdot t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(N(t)=n) = \frac{\beta(1-e^{-\alpha t})}{\alpha \cancel{t}} \cdot \lambda \cancel{t} =$$

$$= \lambda \cdot \beta \cdot \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}.$$