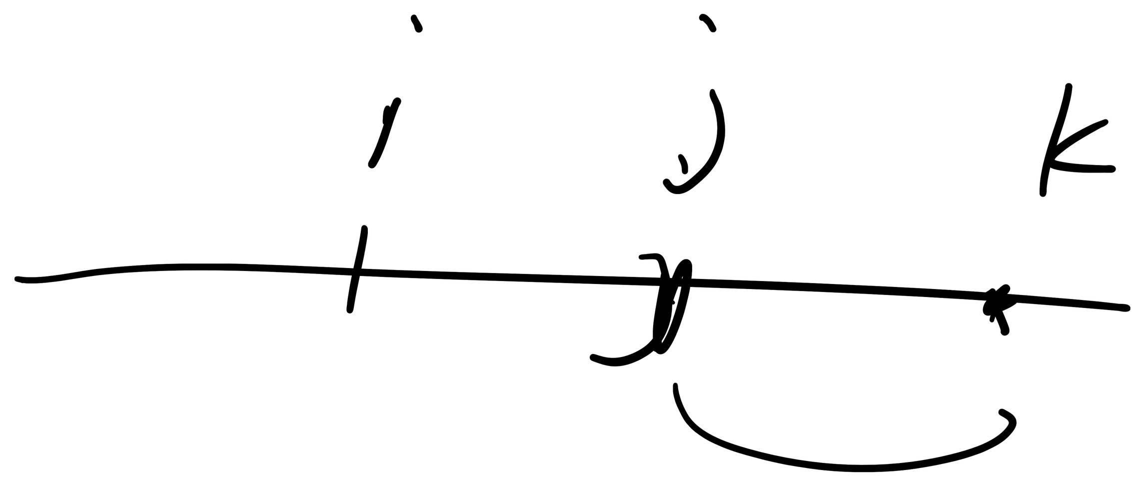
1. (Ιούν. 2012, Τεστ εξάσκησης, 1) Έστω $(X_n)_{n\geqslant 0}$ martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ με $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $0 \leqslant i < j < k$ θετικούς ακεραίους, να δειχθούν τα εξής.

(α) $\mathbf{E}((X_k - X_j)X_i) = 0$.

(β) $\mathbf{E}\{(X_k - X_j)^2 \,|\, \mathcal{F}_i) = \mathbf{E}(X_k^2 \,|\, \mathcal{F}_i) - \mathbf{E}(X_j^2 \,|\, \mathcal{F}_i)$.



(α) $E((X_k - X_j)X_i) =$

$= E(E((X_k - X_j)X_i | \mathcal{F}_j))$

$= E(X_i (E(X_k | \mathcal{F}_j) - X_j))$

$= 0$

(β) $E(X_k^2 | \mathcal{F}_i) - 2E(X_k X_j | \mathcal{F}_i)$

$+ E(X_j^2 | \mathcal{F}_i)$

όμως $E(X_k X_j | \mathcal{F}_i) =$

$$= E(E(X_k X_j \mid \mathcal{F}_j) \mid \mathcal{F}_i)$$

$$= E(X_j \, E(X_k \mid \mathcal{F}_j) \mid \mathcal{F}_i)$$

$$= E(X_j^2 \mid \mathcal{F}_i)$$

2. (Απρ. 2017, 6) Έστω $(B_t)_{t\geqslant 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

(α) Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $B_1^2 B_3 B_6$;

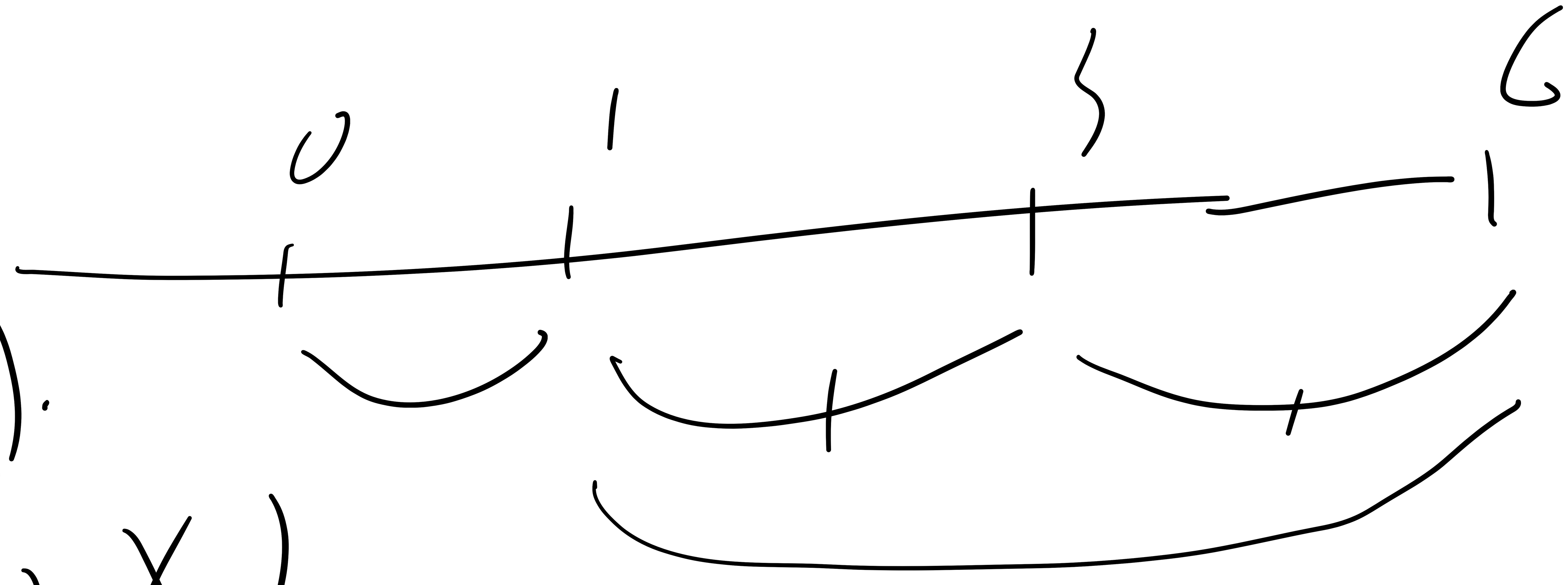
(β) Να εξεταστεί αν η ανέλιξη $(B_t^2)_{t\geqslant 0}$ είναι martingale, supermartingale ή submartingale ως προς τη διήθηση που παράγει η $(B_t)_{t\geqslant 0}$.

(γ) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(|B_1| \mid B_1^2)$;

Λυση

α) $X_1 = B_1$, $X_2 = B_3 - B_1$

$X_3 = B_6 - B_3$



$X_1^2 \cdot (X_1 + X_2) \cdot (X_1 + X_2 + X_3)$

$\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$

$$E(B_1^2 B_3 B_6) = E(E(B_1^2 B_3 B_6 \mid \mathcal{F}_3))$$

$$= E(B_1^2 B_3 \, E(B_6 \mid \mathcal{F}_3))$$

$$= E(B_1^2 \, B_3 \, B_3) = E(B_1^2 B_3^2)$$

$$= E(B_1^2 \, E(B_3^2 \mid \mathcal{F}_1)) \quad *$$

$$B_t^2 - t \qquad E(B_3^2 \mid \mathcal{F}_1) - 3$$

$$= B_1^2 - 1$$

$$E(B_3^2 \mid \mathcal{F}_1) = B_1^2 + 2$$

$$* = E(\underbrace{B_1^4}_{\sim N(0,1)} + 2 B_1^2) =$$

$$= 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

(d) $f(x) = x^2 \qquad f(B_t)$

$$\Big(E(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s) \geq f(E(X_t \mid \mathcal{F}_s)) = f(X_s) \Big)$$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ konvexní} \\ B \text{ martingale} \end{array}\right\}$

$E|f(B_t)| < \infty \} \Rightarrow (f(B_t))_{t \geq 0}$

submartingale

(γ) $E(|B_1| \mid B_1^2) = |B_1|$

γιατί η $|B_1|$ είναι $\sigma(B_1^2)$ μετρήσιμη. (γιατί $|B_1| = f(B_1^2)$

με $f(x) = x^2$)

4. (Νοεμ. 2017, 4) Έστω $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = i) = 1/6$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\},$$
$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1$$
$$S_0 := 0,$$
$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για κάθε } n \geqslant 1.$$

Έστω T ο μοναδικός ακέραιος k ώστε $S_{k-1} < 100 \leqslant S_k$. Να δειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F})_{n\geqslant 0}$ και ότι $S_T \leqslant 105$.

Λύση

$S_n \nearrow$ γιατί $S_{n+1} - S_n = X_{n+1} \geq 1$

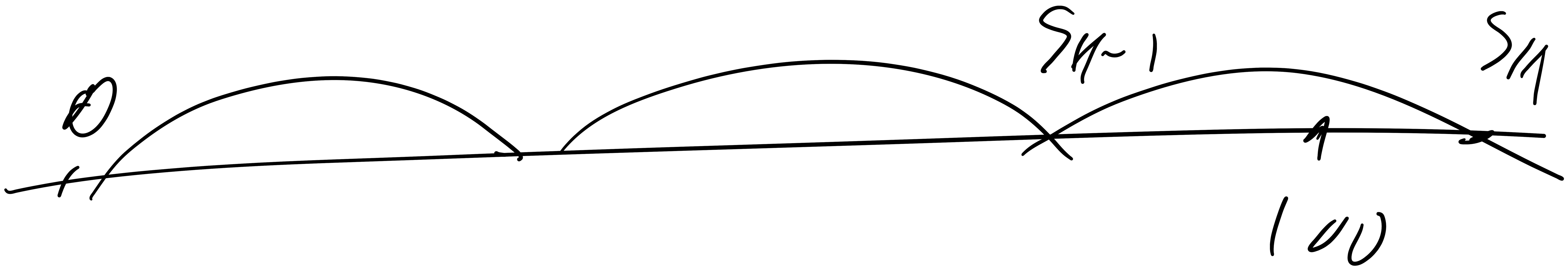
$S_n \geq n$

$A = \{n : S_n \geq 100\} \subset \mathbb{N}^+$

$100 \in A$. $k = \min A$

$S_n \geq 100$

$n-1 \notin A \Rightarrow S_{n-1} < 100$



$100 \in A \Rightarrow T \leq 100$

Θέλουμε $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0$

Για $n=0$ $\{T \leq 0\} = \emptyset$

Για $n \geq 1$

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{T = k\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \{ S_{k-1} < 100 \leq S_k \} \in \mathcal{F}_n$$

Ισχύει $S_{T-1} < 100$ (≤ 99)

$$\mathbb{N} \ni S_T = S_{T-1} + X_T < 100+6 = 106$$

$S_T \leq 105$

Άσκηση

$(X_n)_{n \geq 0}$ submartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ώστε $E(X_n) = E(X_0)$ $\forall n \geq 0$.

Ν.δ. ότι η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$

Λύση

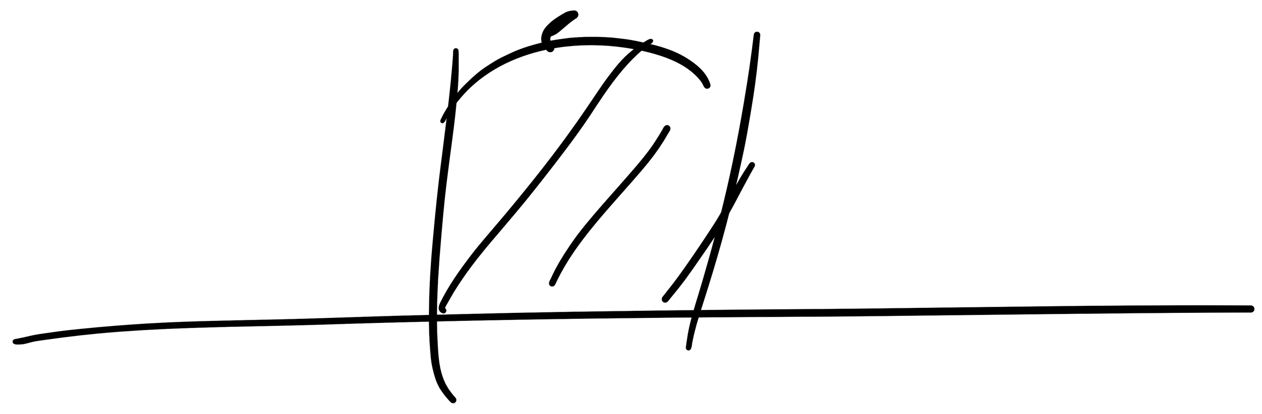
Έχουμε
$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow Z := E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \geq 0$$

$$EZ = E(E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) - EX_n = EX_{n+1} - EX_n = 0$$

$$\overset{Z \geq 0}{\Rightarrow} P(Z = 0) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 f\,dx = 0 \\ &f \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \equiv 0$$



8. (Νοεμ. 2017, 5) Έστω $(B_t)_{t\geqslant 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown. Για κάθε $t \geqslant 0$ θέτουμε $M_t := \max\{B_s : s \in [0,t]\}$. Να δειχθεί ότι

(α) $M_t \overset{d}{=} \sqrt{t}M_1$

(β) $\mathbf{E}(M_t^2) = t$.

Λύση

(α) $W_r = \dfrac{B_{rt}}{\sqrt{t}} \quad \forall r \geqslant 0$

$\underline{B_{rt} = \sqrt{t}\, W_r}$

W είναι τ.κ.Β

$M_t = \max\{B_s : s \in [0,t]\}$

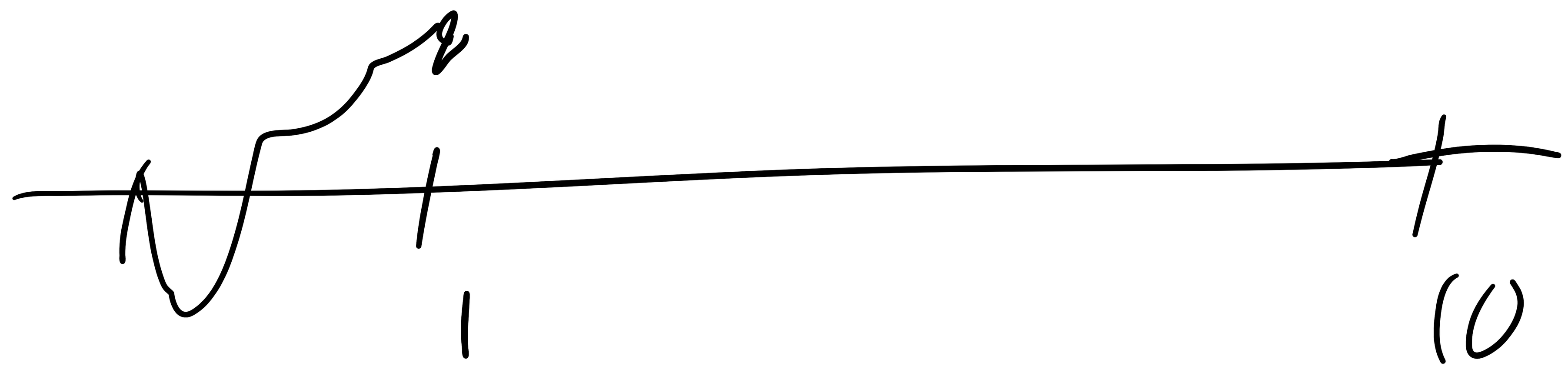
$= \max\{\sqrt{t}\, W_r : r \in [0,1]\}$

$= \sqrt{t} \max\{W_r : r \in [0,1]\}$

$\overset{d}{=} \sqrt{t}\, M_1$

$t = 10$

$\sqrt{10}\, M_1$



$M_1 \overset{d}{=} |B_1|$

(β) $E(M_t^2) = t\,E(M_1^2) = t\,E(B_1^2)$
$= t$

9. (Σεπτ. 2018, 3) Για κάθε $t \in (0,\infty)$ θέτουμε $X_t := \int_0^t \mathbf{1}_{B_s>0}\, ds = \lambda(\{s \in [0,t] : B_s > 0\})$.
(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $a > 0$ ώστε να ισχύει $X_t \overset{d}{=} t^a X_1$ για κάθε $t > 0$.
(β) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

Λύση

α) Η $W_r = \dfrac{B_{rt}}{\sqrt{t}}$ $r \geq 0$ είναι Τ.Κ.Β

$$\{s \in [0,t] : B_s > 0\} = \{rt \in [0,t] : B_{rt} > 0\}$$

$$= t\{r \in [0,1] : W_r > 0\}$$

$$\Rightarrow \lambda(\{s \in [0,t] : B_s > 0\}) = t\,\lambda(\{r \in [0,1] : W_r > 0\})$$

9. (Σεπτ. 2018, 3) Για κάθε $t \in (0,\infty)$ θέτουμε $X_t := \int_0^t \mathbf{1}_{B_s>0}\, ds = \lambda(\{s \in [0,t] : B_s > 0\})$.
(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $a > 0$ ώστε να ισχύει $X_t \overset{d}{=} t^a X_1$ για κάθε $t > 0$.
(β) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

$$W \overset{d}{=} B$$

$$\Rightarrow X_t = t\,\lambda(\{r \in [0,1] : W_r > 0\}) \overset{d}{=} t X_1$$

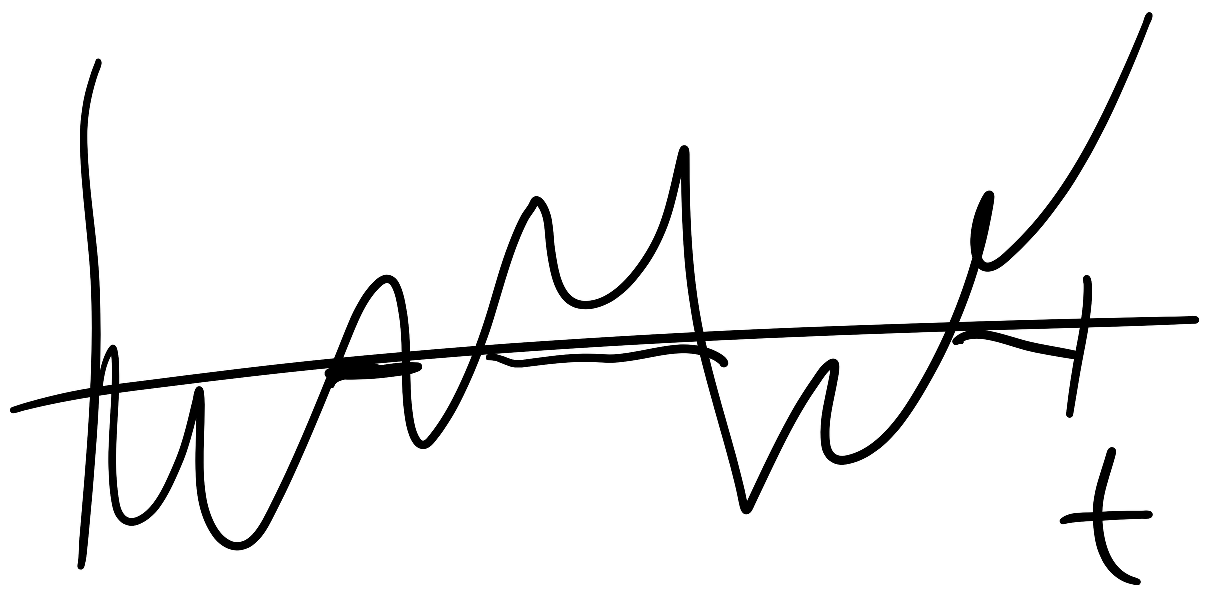
$$\left[\; W \overset{d}{=} B \Rightarrow h(W) \overset{d}{=} h(B) \;\right]$$

h μετρήσιμη

β) $X_t = \int_0^t 1_{B_s > 0}\, ds$

$$E X_t = \int_0^t E(1_{B_s > 0})\, ds = \int_0^t P(B_s > 0)\, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t ds = \frac{t}{2}$$



12. (Σεπτ. 2018, 6) Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbf{E}\{\log(1 + B_t^2)\} = \int_0^t \mathbf{E}\left(\frac{1 - B_s^2}{(1 + B_s^2)^2}\right) ds.$$

B τ.κ.Β.

Λύση $\log(1+x^2)$

$$d\left(\log(1+B_t^2)\right) = \frac{2B_t}{1+B_t^2}\, dB_t + \frac{1}{2}\, \frac{2(1-B_t^2)}{(1+B_t^2)^2}\, dt$$

$$\left[\; f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \;\right]$$

$$\Rightarrow \log(1+B_t^2) = \underbrace{\log(1+0^2)}_{0} + \underbrace{2\int_0^t \frac{B_s}{1+B_s^2}\, dB_s}_{= X} +$$

$$+ \int_0^t \frac{1-B_s^2}{(1+B_s^2)^2}\, ds$$

$EX=0$ γιατί $E\left(\int_0^t \overbrace{\frac{B_s^2}{(1+B_s^2)^2}}^{\le 1}\, ds\right)$

$\le t < \infty$

Άρα $E(\log(1+B_t^2)) = \int_0^t E\left(\frac{1-B_s^2}{(1+B_s^2)^2}\right) ds$

<u>Άσκηση</u> Έστω ότι $h : [0,t] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $B =$ τ.κ.Β.

Ν.δ. ότι η τ.μ. $X = \int_0^t B_s\, h(s)\, ds$

είναι καλά ορισμένη και $X \sim N(0, \sigma^2)$

για κάποιο $\sigma^2 \ge 0$

Λύση

Έστω $H(s) = \int_0^s h(r)\, dr$, $H' = h$

$$d(B_s H(s)) = H(s)\, dB_s + B_s H'(s)\, ds + dB_s\, H'(s)\, ds$$

$$= H(s)\, dB_s + B_s\, h(s)\, ds \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow B_t H(t) = \int_0^t H(s)\, dB_s + \int_0^t B_s\, h(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad X = B_t H(t) - \int_0^t H(s)\, dB_s$$

$$= \int_0^t H(t)\, dB_s - \int_0^t H(s)\, dB_s$$

$$= \int_0^t (H(t) - H(s))\, dB_s$$

$X \sim N(0, \sigma^2)$ για

$$\sigma^2 = \int_0^t (H(t) - H(s))^2\, ds =$$

$$= \int_0^t \left(\int_s^t h(r)\, dr \right)^2 ds$$

15. (Σεπτ. 2017, 6) Έστω B τυπική κίνηση Brown και $T := \inf\{t > 0 : B_t + t^{-1/2} = 0\}$. Θέτουμε

$$X_t := \frac{1}{t^{-1/2} + B_t}$$

για κάθε $t \in (0, T)$, και $X_0 = 0$. (α) Να δειχθεί ότι η X ικανοποιεί στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$$

$X_t = f(t, B_t)$

όπου $f(t,x) = \dfrac{1}{t^{-\frac{1}{2}} + x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(\;)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{(\;)^3}$$

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\,dB_t + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{(\quad)^2}\left(-\frac{1}{2}\,t^{-\frac{3}{2}}\right)dt - \frac{dB_t}{\left(t^{-\frac{1}{2}}+B_t\right)^2}$$

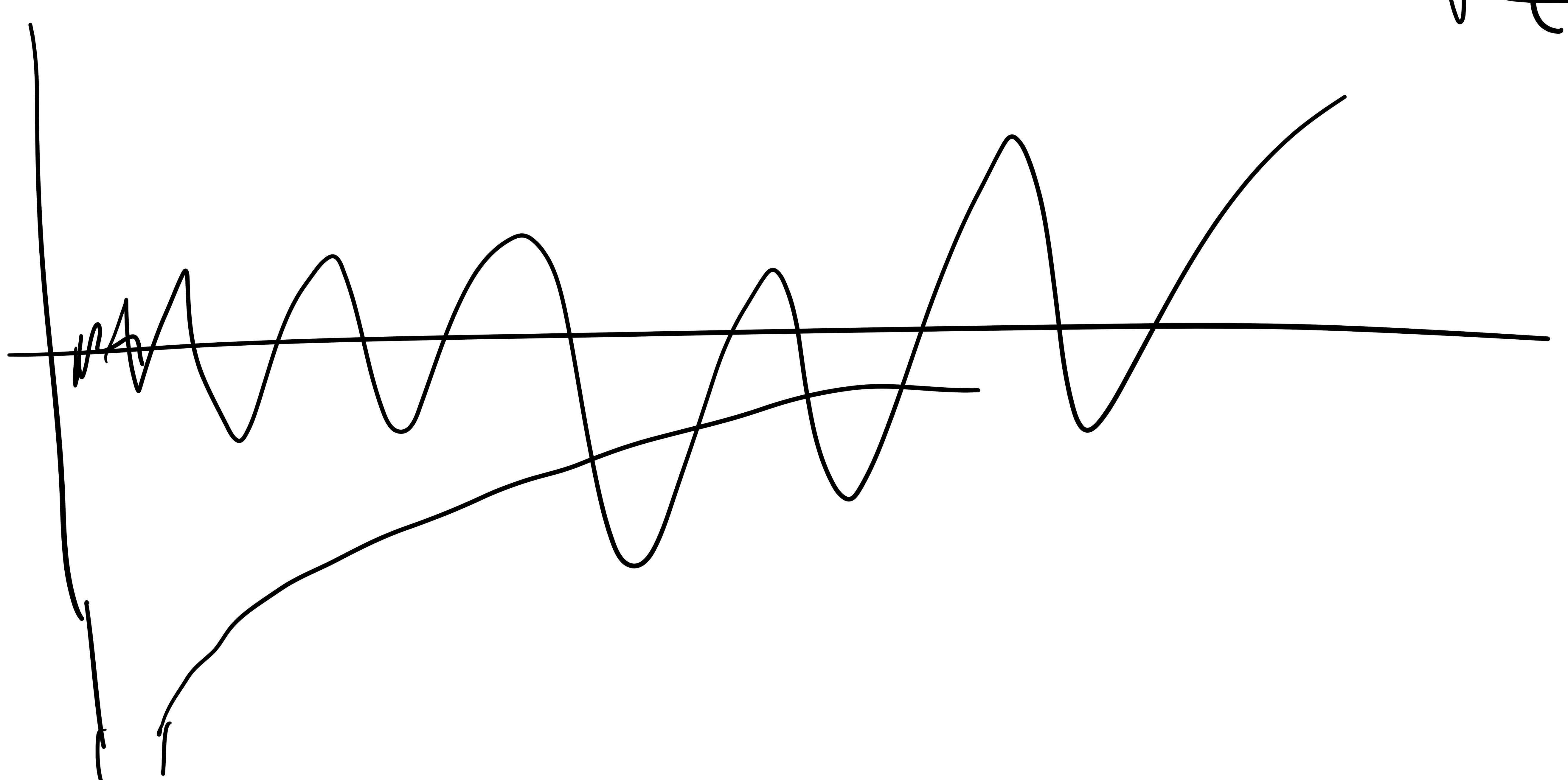
$$+\frac{1}{2}\,\frac{2}{\left(t^{-\frac{1}{2}}+B_t\right)^3}\,dt = \frac{1}{2}\,t^{-\frac{3}{2}}\,X_t^2\,dt$$

$$- X_t^2\,dB_t + X_t^3\,dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,t^{-\frac{3}{2}}\,X_t^2 + X_t^3\right)dt - X_t^2\,dB_t$$

για κατάλληλες συναρτήσεις a, σ.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

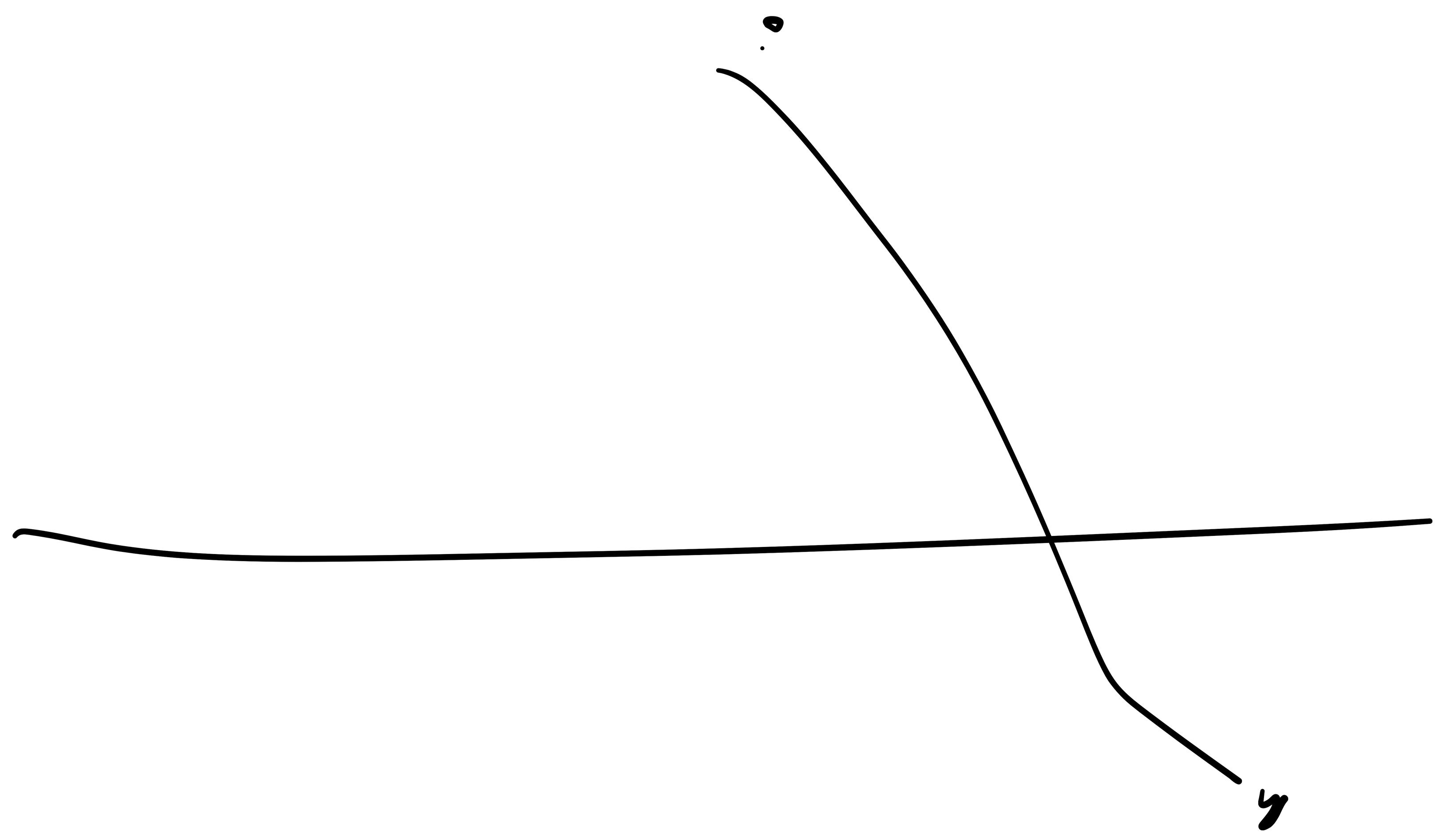
$$t^{-\frac{1}{2}} + B_t = 0 \qquad B_t = -\frac{1}{\sqrt{t}}$$



Έστω $h(t) = t^{-\frac{1}{2}} + B_t \qquad t > 0$

δείξ(ι) $\quad \overline{\lim}\, h(t) = \infty$

$\underline{\lim}\, h(t) = -\infty$



13. (Φεβρ. 2018, 5) Έστω $(B_t)_{t\geqslant 0}, (W_t)_{t\geqslant 0}$ δυό ανεξάρτητες τυπικές μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Να υπολογιστούν τα διαφορικά των ανελίξεων
(α) $\cos(tB_t)$,
(β) $B_t^2 e^{\int_0^t s\, dB_s}$,
(γ) $B_t^2 W_t$.

α) $X_t = t B_t \qquad Y_t = \cos(X_t)$

$$dY_t = -\sin(tB_t)\, dX_t - \frac{1}{2}\cos(tB_t)\,(dX_t)^2$$

$$dX_t = B_t\, dt + t\, dB_t + \cancel{dt\, dB_t}^{\,0}$$

$$(dX_t)^2 = t^2\, dt$$

$$dY_t = -\sin(tB_t)\left(B_t \underline{dt} + t\,dB_t\right)$$
$$- \frac{1}{2} t^2 \cos(tB_t)\, \underline{dt}$$

(e) $X_t = \int_0^t s\, dB_s \qquad dX_t = t\,dB_t$

$$d\left(B_t^2 e^{X_t}\right) = \underline{d\left(B_t^2\right)}\, e^{X_t}$$
$$+ \underline{B_t^2}\, d\left(e^{X_t}\right) + \underline{d\left(B_t^2\right) d\left(e^{X_t}\right)}$$

$$dB_t^2 = \underline{2B_t\, dB_t} + \frac{1}{2}\, dt$$

$$d\left(e^{X_t}\right) = e^{X_t}\, dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t} (dX_t)^2$$

$$= \underline{e^{X_t}\, t\, dB_t} + t^2 e^{X_t}\, dt$$