Σημείωση: § 12.5, Κεφ. 13

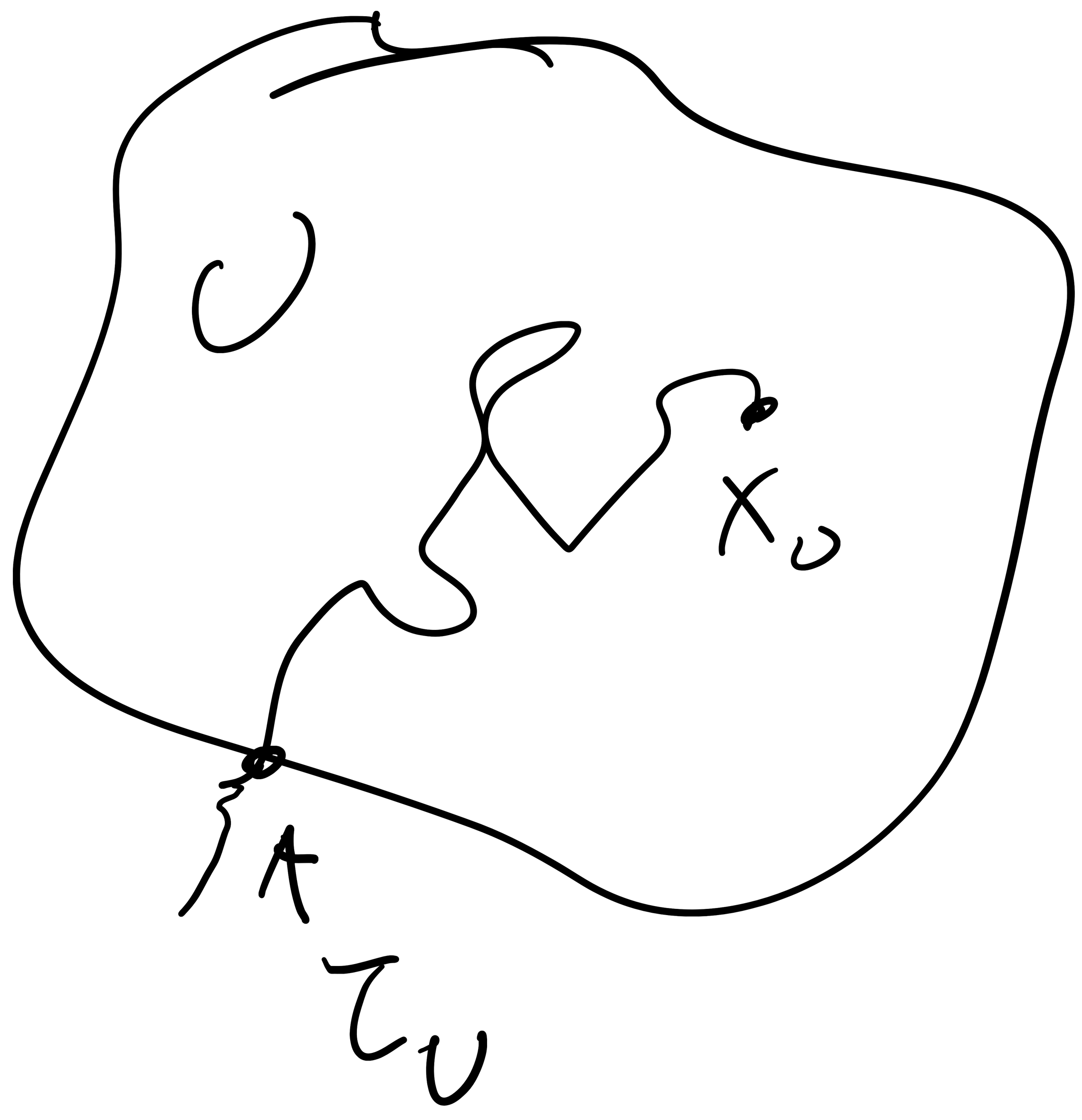
$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \cdot \, ds + \int_0^t \cdot \, dB_s$$

$\log X_t$

Έχουμε $U \subset \mathbb{R}^d$, X_t ανέλιξη με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ και $X_0 = x_0 \in U$.

Για $A \subset \mathbb{R}^d$, ορίζουμε

$\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A^c\}$



X_{τ_U}

Πρόταση (Τύπος Itô. εκδοχή U)

$U \subset \mathbb{R}^d$ ανοιχτό, $f \in C^2(U)$, $(X_t)_{t \geq 0}$ ανέλιξη Itô με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ και $X_0 \in U$. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s)\cdot dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, dX_s^{(i)}\, dX_s^{(j)}$$

für $0 \leq t < \tau_U$

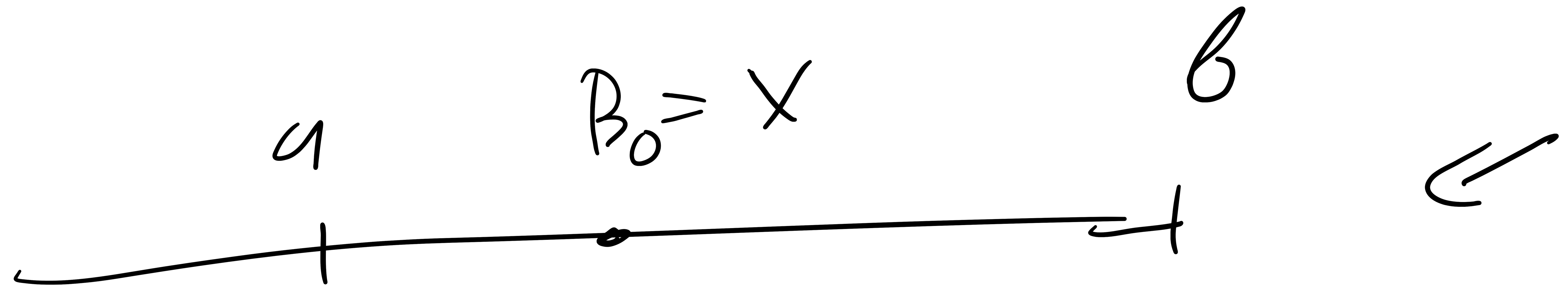
$f \in C^2(U)$

$f(X_t)$

$f_n \in C^2(\mathbb{R}^d)$

$t < \tau_{K_n}$

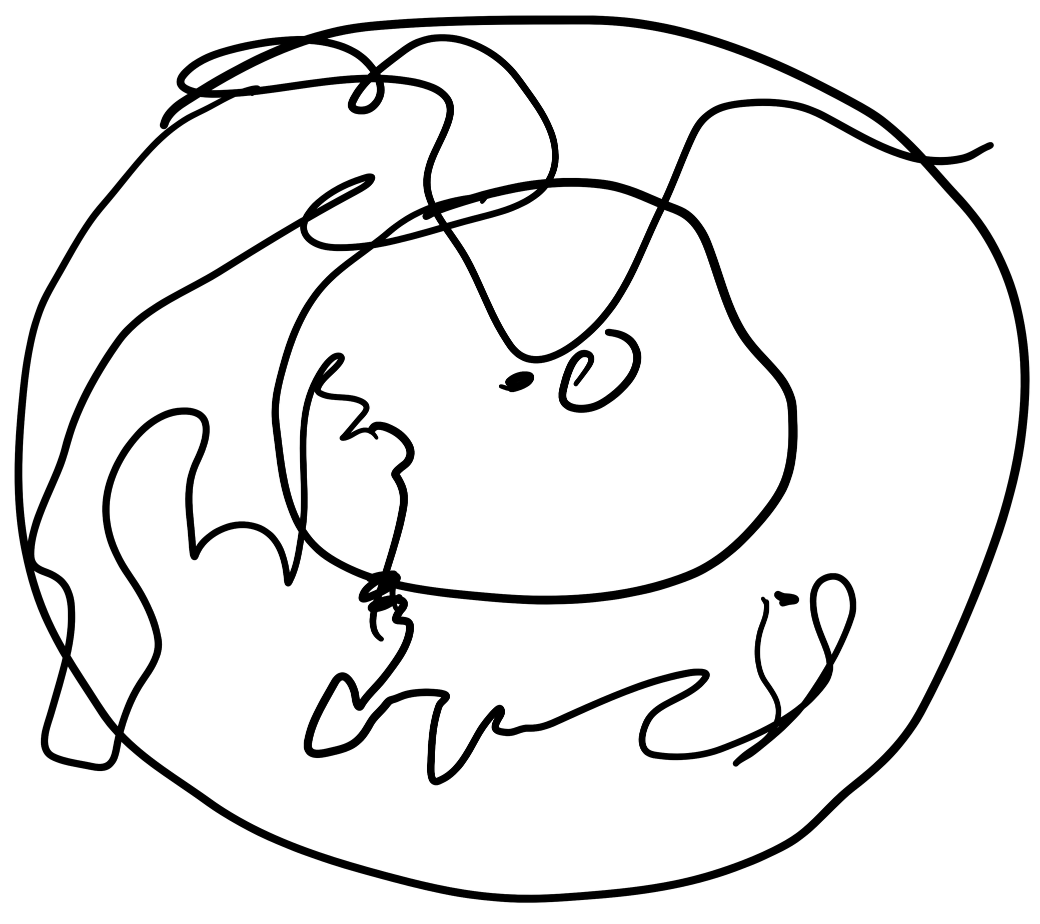
Κεφάλαιο 13 Εφαρμογή στη μελέτη της πολυδιάστατης κίνησης Brown.



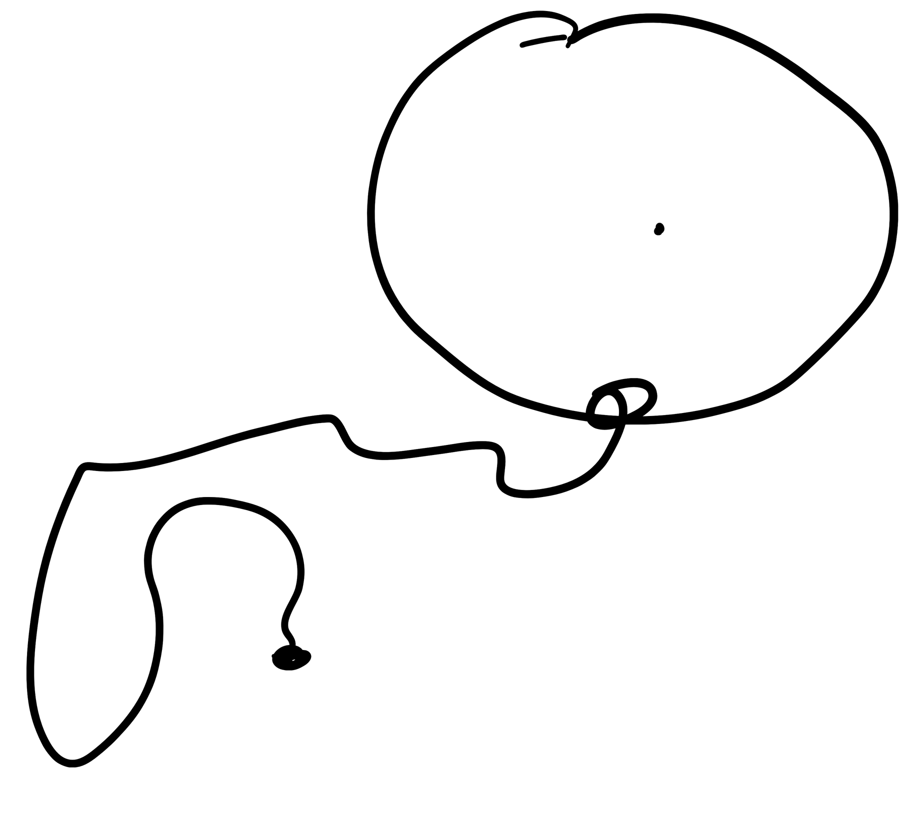
$a - x \qquad B_t - x \qquad b - x$

$B_t \qquad E B_\tau = E B_0$

$$E f(B_\tau) = E f(B_0)$$



$$d f(B_t) = D f(B_t) \cdot dB_t + \frac{1}{2} \Delta f(B_t)\, dt$$



$\Delta f = 0$

Ψάχνουμε αρμονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^d$.

B κίνηση Brown στο $\mathbb{R}^d$

הגדרה $|x| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$

$\forall x \in \mathbb{R}^d$

הגדרה $u_d(x)$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$

$u_2(x) = \log|x| = \frac{1}{2}\log(x_1^2 + x_2^2)$

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$u_d(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

טענה $\Delta u_d(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$d \geq 2$.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{2(x_1^2 + x_2^2)} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_1}{|x|^4}$$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^4}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{|x|^4}\right\} \Rightarrow \Delta u_2(x) = 0$$

όμοια για $d \in \mathbb{N}, d \geq 3$

<u>Πρόταση</u> $d \in \mathbb{N}^+, d \geq 2$

$U \subset \mathbb{R}^d$ ανοιχτό, φραγμένο,

$u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $\Delta u = 0$ στο U

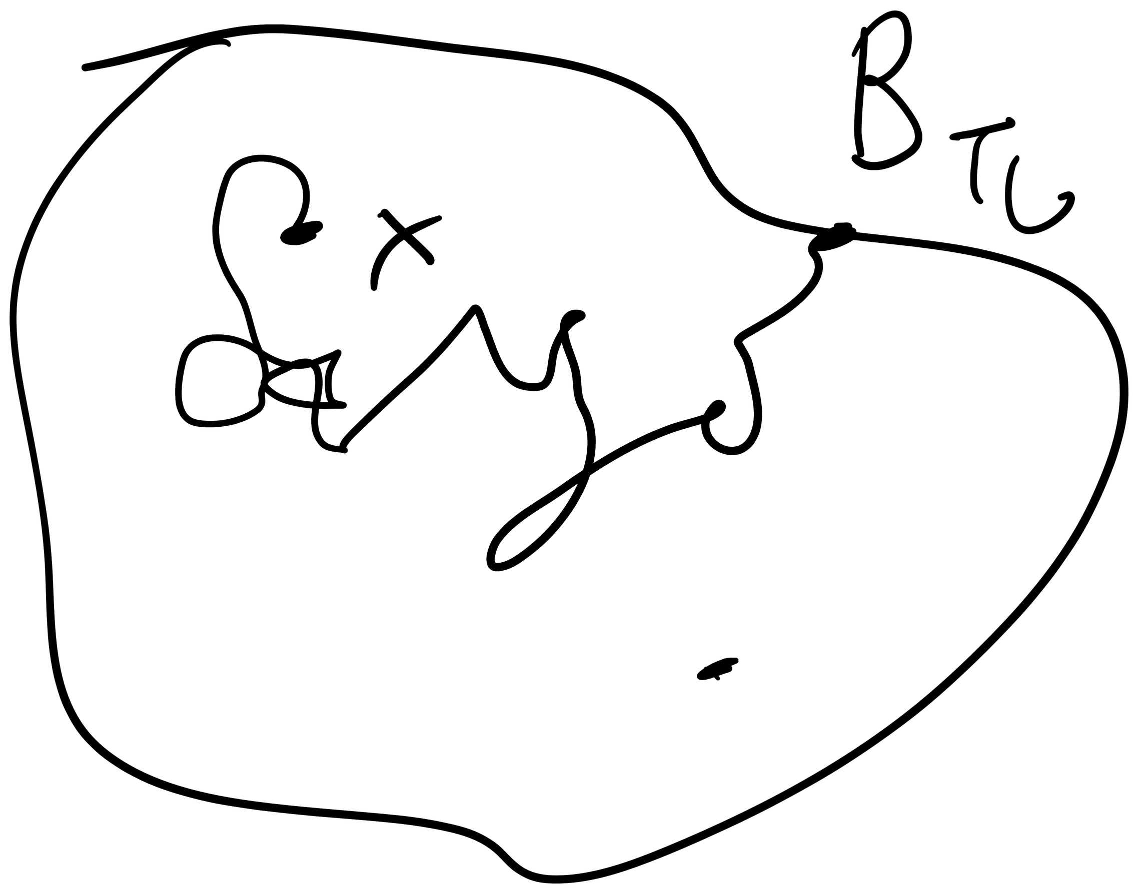
B d-διάστατη κίνηση Brown.

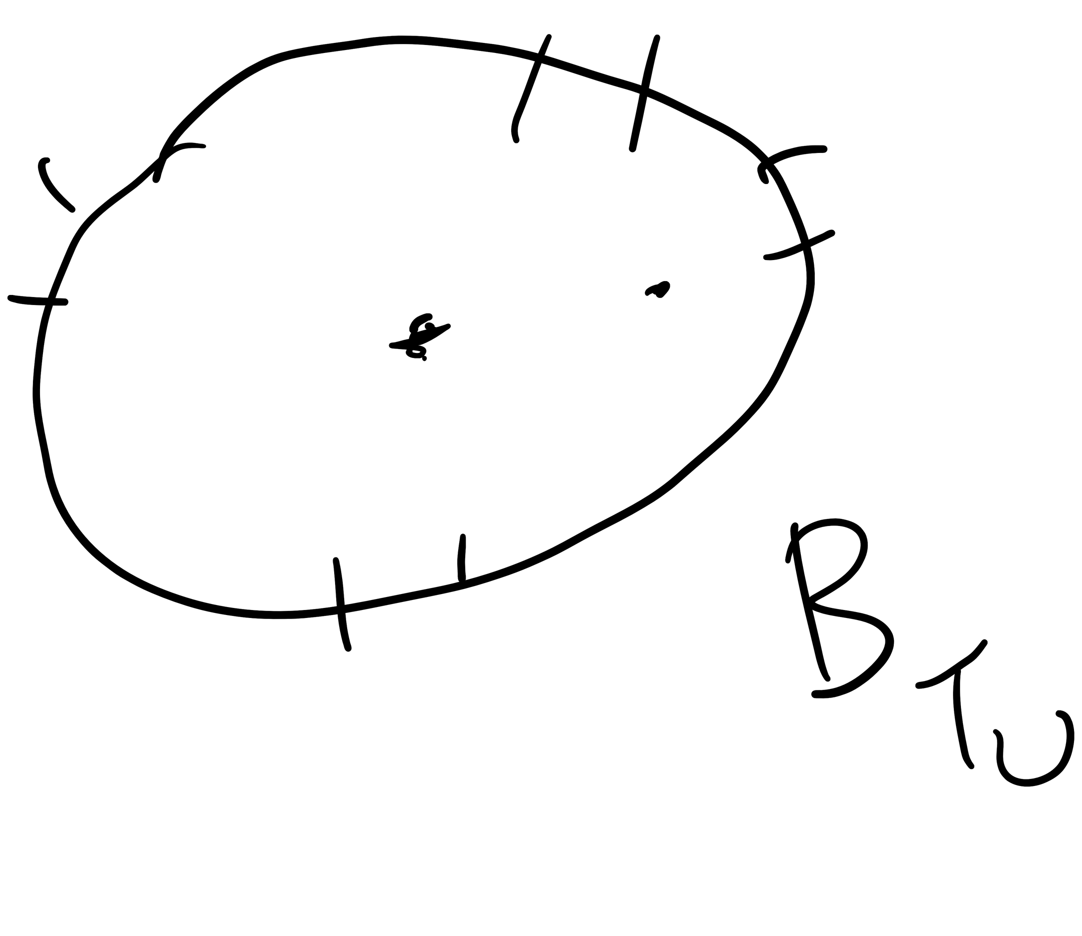
$\tau_U = \inf\{t : B_t \in U^c\}$.

Τότε

$$u(x) = E_x\, u(B_{\tau_U}) \quad \forall x \in U \quad (*)$$

$B_0 = x$





$$u(B_t) = u(B_0) + \int_0^t \nabla u(B_s)\cdot dB_s + 0$$

για $t < T_U$ $\quad B_0 = x$

$$E\, u(B_{T_U}) = E\, u(B_0) = u(x)$$

§13.2 Έξοδος από δακτύλιο.

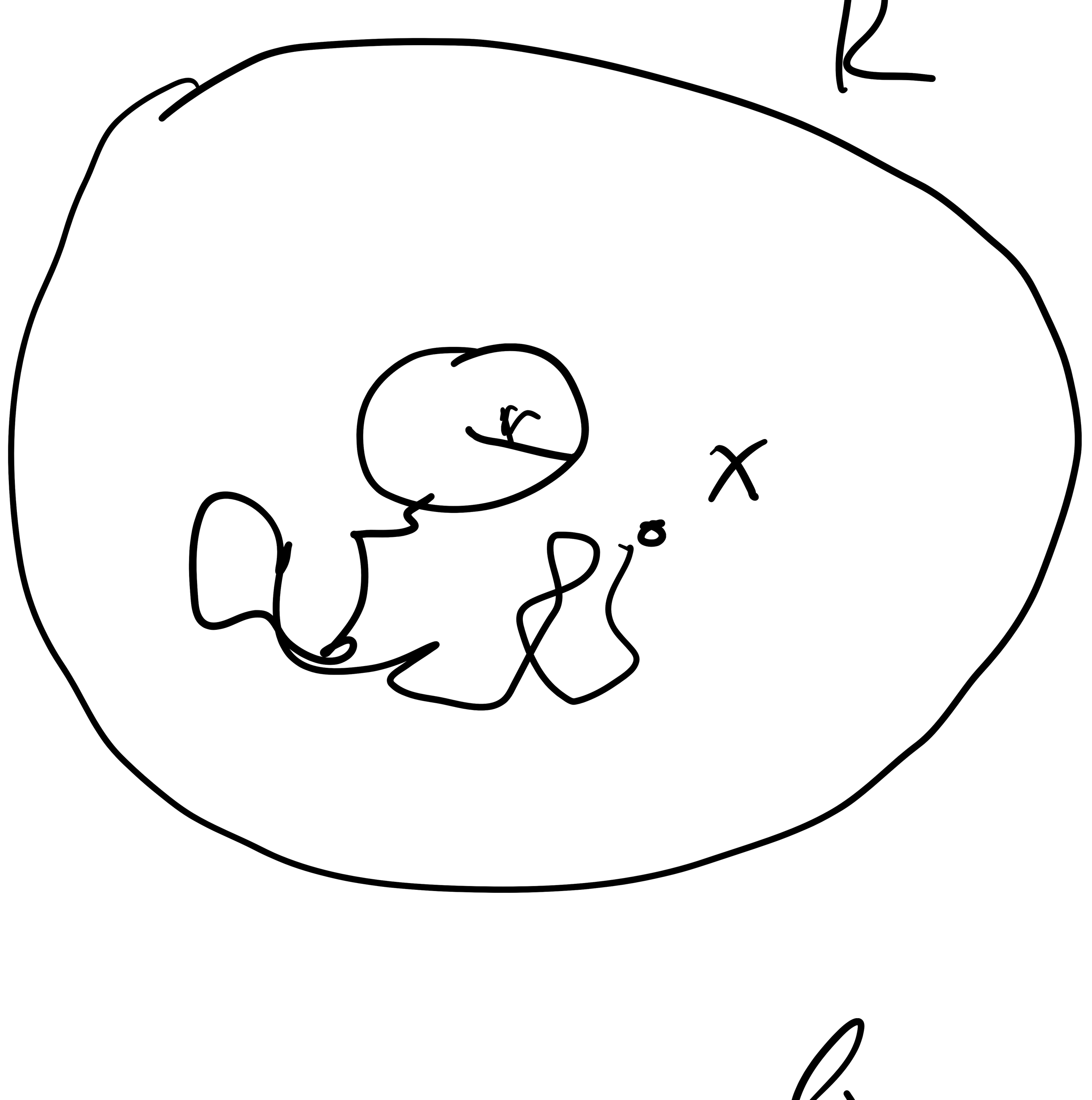
B d-διάστατη κ.Β.

$0 < r < R$

$$G_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < R\}$$

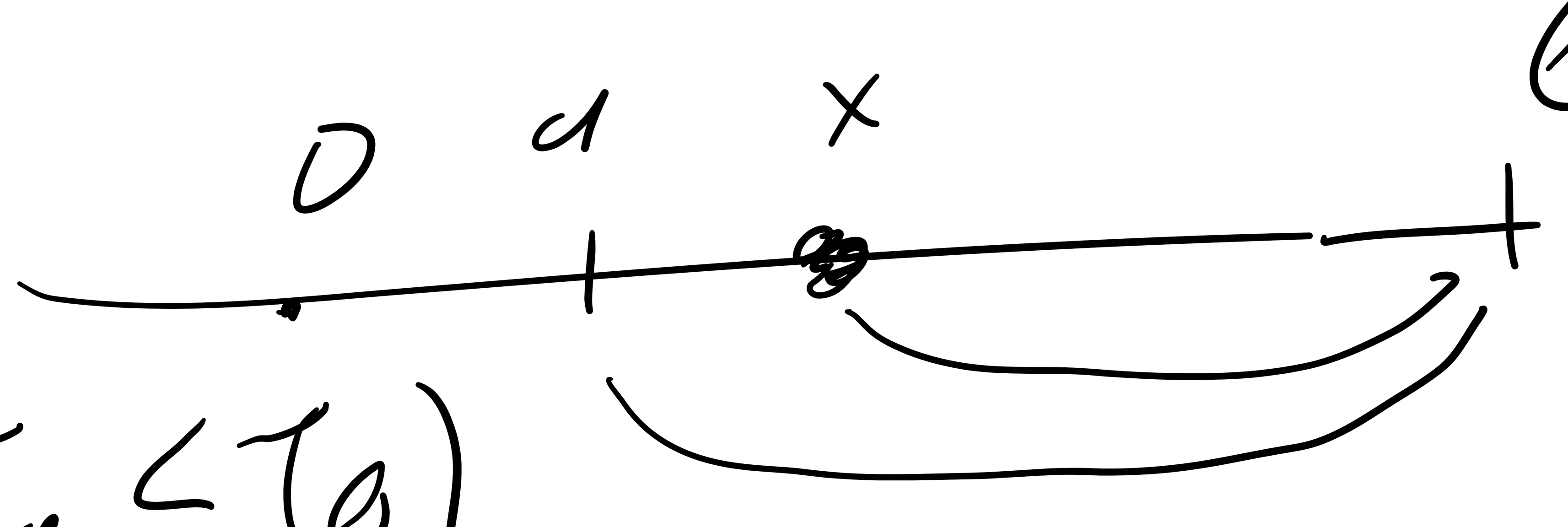
Για $a > 0$

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$$



Θέλουμε την

$$P_x(T_r < T_R)$$



$$\frac{b-x}{b-a} = P_x(T_a < T_b)$$

Παρατηρούμε ότι $u_d(x) = f_d(|x|)$

για κάποια $f_d : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_2(r) = \log r \qquad \forall r>0$$

$$f_d(r) = \frac{1}{r^{d-2}} \qquad \forall r>0 \quad d\geq 3, \; d\in\mathbb{N}$$

<u>Πρόταση</u> $d \geq 2$ B d-διάστατη Κ.Β.

$0<r<|x|<R \; (<\infty)$. Ισχύει

$$P_x(\tau_r < \tau_R) = \frac{f_d(R) - f_d(|x|)}{f_d(R) - f_d(r)}$$

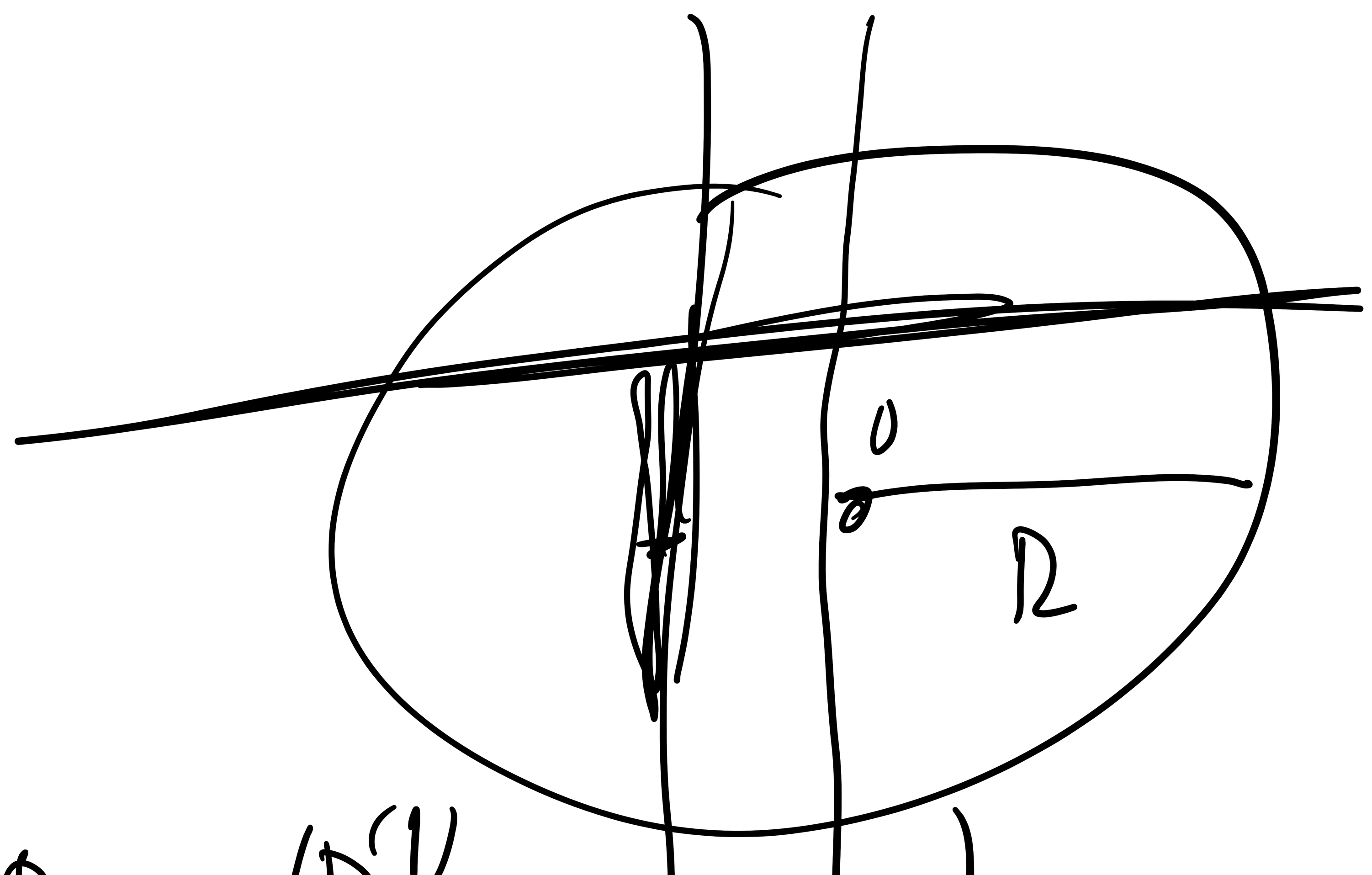
Αποδ.

Εφαρμόζουμε την (*) για $u = u_d$

και $U = G_{r,R}$.

$$\tau_U = \tau_r \wedge \tau_R$$

$< \infty$ με πιθ. 1.



$B_t = (B_t^{(1)}, \;)$

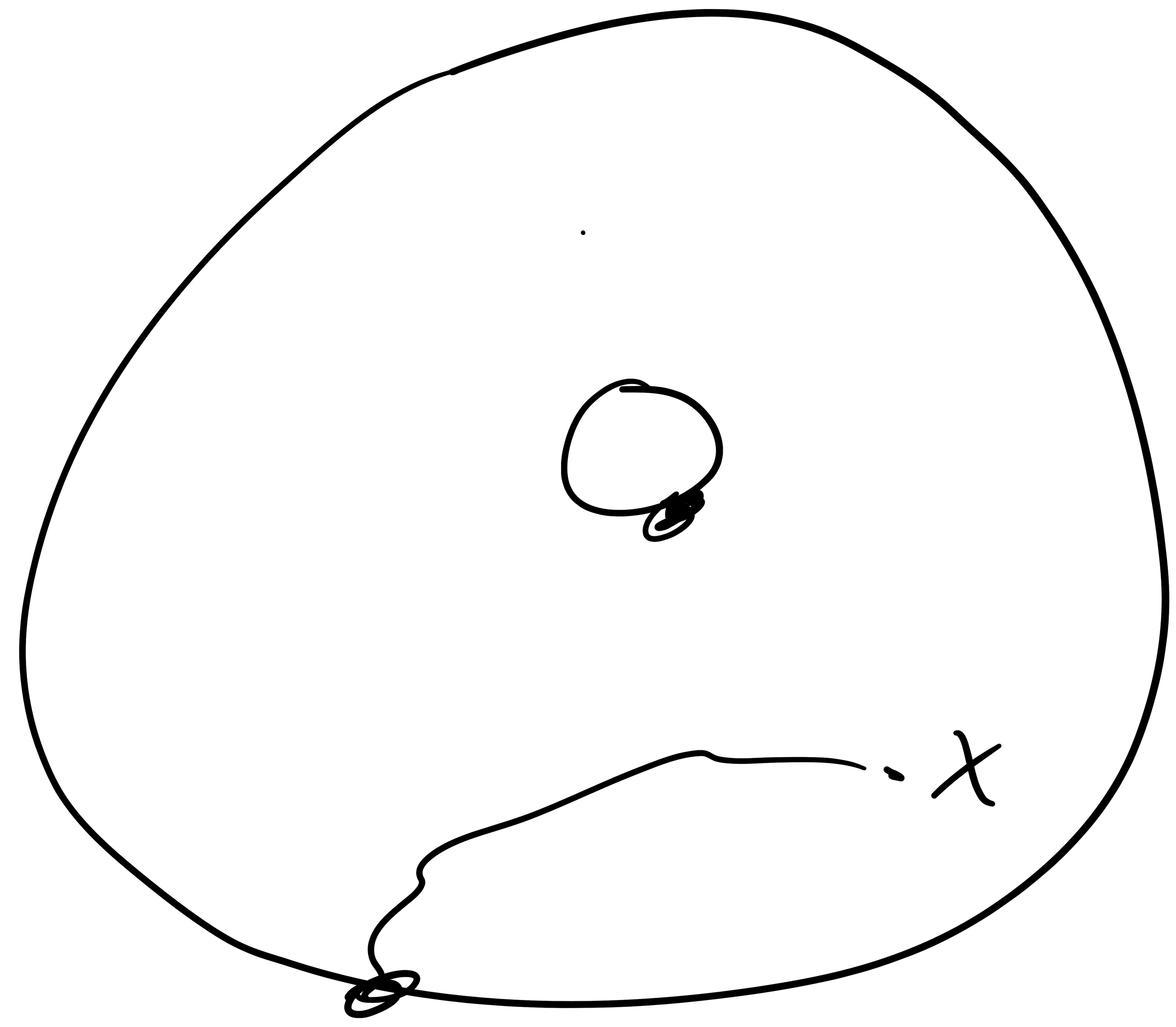
$$u_d(x) = E_x\, u_d(B_{\tau_U}) \Rightarrow$$

$$f_d(|x|) = E_x\Big(u_d(B_{\tau_U})\, 1_{\tau_r < \tau_R} +$$

$$u_d(B_{\tau_U})\, 1_{\tau_R < \tau_r}\Big)$$

$$= E_x\big(f_d(r)\, 1_{\tau_r<\tau_R} + f_d(R)\, 1_{\tau_R<\tau_r}\big)$$

$$A = \{\tau_r < \tau_R\}$$



$$f_d(|x|) = P_x(A)\, f_d(r)$$

$$+ \; P_x(A^c)\, f_d(R)$$

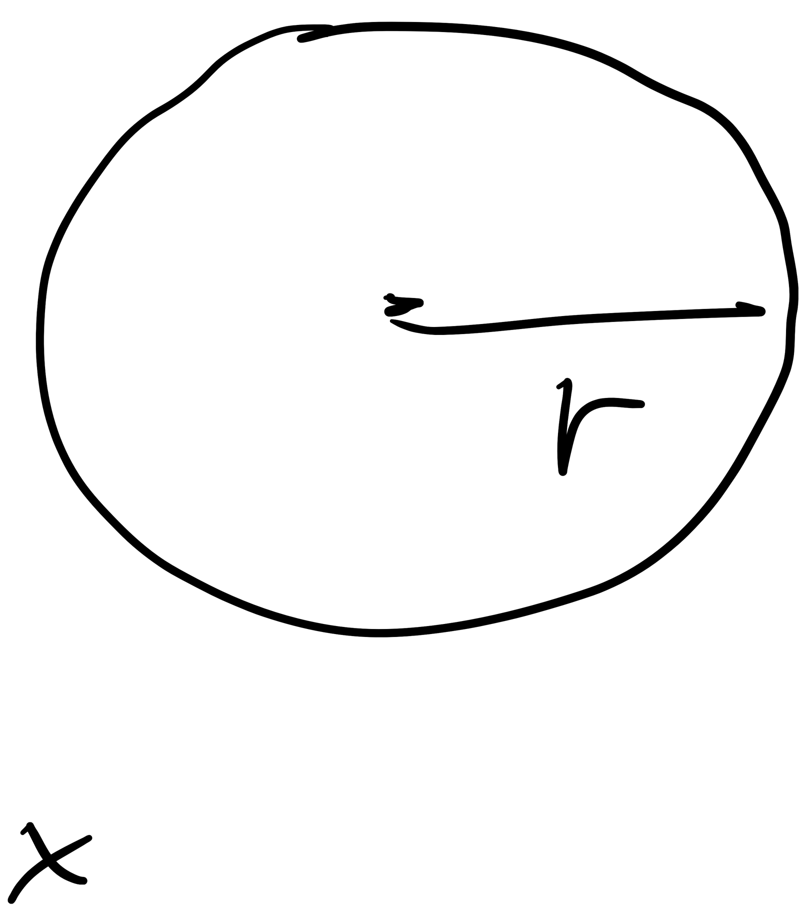
$$= 1 - P_x(A)$$

$$\Rightarrow \; P_x(A) = \frac{f_d(R) - f_d(|x|)}{f_d(R) - f_d(r)} \quad (**)$$

Είσοδος σε σφαίρα

Για $|x| > r$

$P(\tau_r < \infty) =$;



Για $d=1$

$P(\tau_r < \infty) = 1$

Πόρισμα Για $0 < r < |x|$

$$P_x(\tau_r < \infty) = \begin{cases} 1 & \text{αν } d=2 \\ \underbrace{\left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2}}_{<1} & \text{αν } d \geq 3 \end{cases}$$

B d-διάστατη κ.Β.

Αποδ.

Εφαρμόζουμε την (**) για

$R = n > |x|$ $n \in \mathbb{N}$.

$$A \cap \{\tau_r < \infty\} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > |x|}} \left(\{\tau_r < \tau_n\} \cap A\right)$$

(***)

Ισχύει $\lim_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ με πιθ. 1.

Αυτό γιατί $\tau_n < \tau_{n+1}$ και αν

$\lim_{n \to \infty} \tau_n = c < \infty$ τότε

η $B | [0, c]$ είναι μη φραγμένη

$A = \{\omega \in \Omega : B^\omega(t)$ συνεχής και

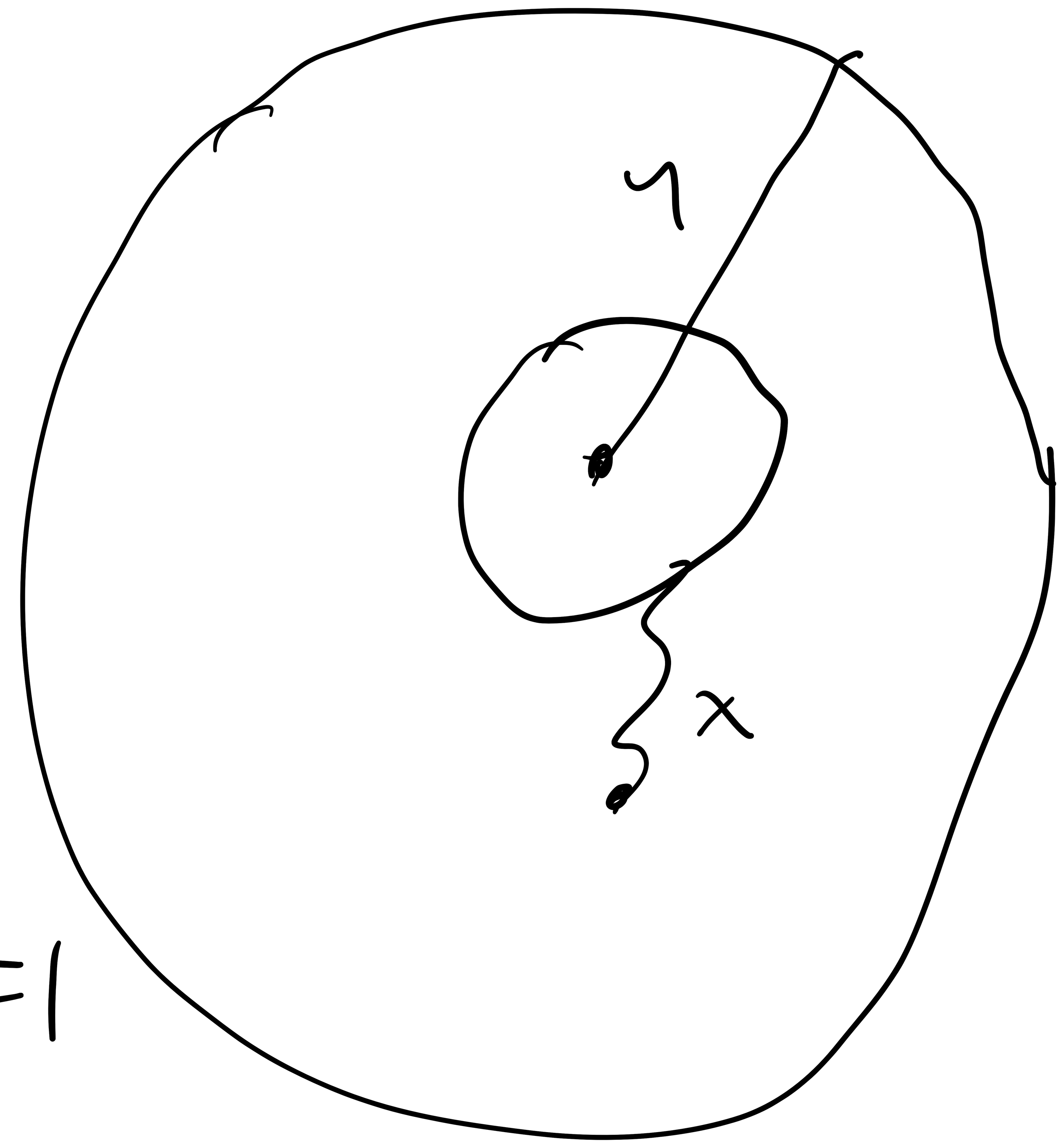
$\overline{\lim} B^\omega(t) = \infty$, $\underline{\lim} B^\omega(t) = -\infty \}$

$P(A) = 1$

$$\overset{***}{\Rightarrow} P_x(\tau_r < \infty) = P_x\left(\bigcup_{n > |x|} \{\tau_r < \tau_n\}\right)$$

$$= \lim_{u \to \infty} P_x(\tau_r < \tau_u) =$$

$$= \lim_{u \to \infty} \frac{f_d(u) - f_d(|x|)}{f_d(u) - f_d(r)}$$



אם $d=2$

$$f_d(u) = \log|u| \to \infty$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $=1$

אם $d \geq 3$

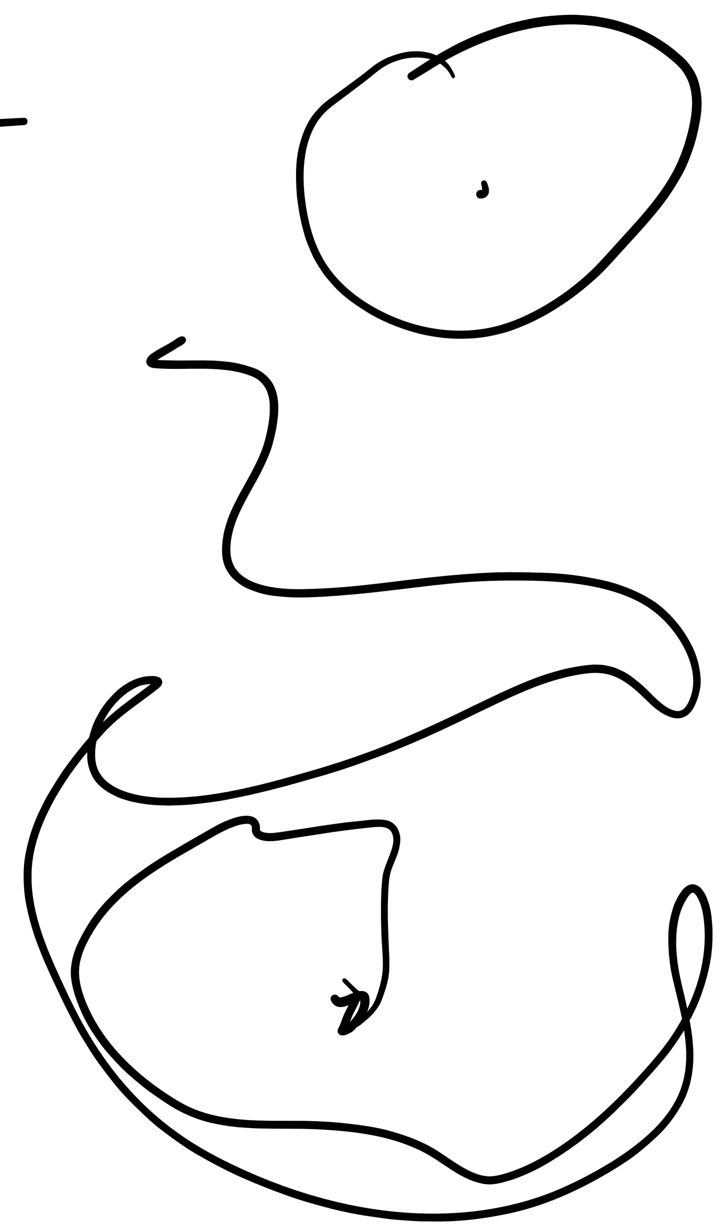
$$f_d(u) = \frac{1}{u^{d-2}} \xrightarrow{u \to \infty} 0$$

לכן $P_x(\tau_r < \infty) = \dfrac{f_d(|x|)}{f_d(r)} = \dfrac{\frac{1}{|x|^{d-2}}}{\frac{1}{r^{d-2}}}$

$$= \left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2}$$

π.χ. Αν $|x| = 10$

$$P_x(\tau_3 < \infty) = \left(\frac{3}{10}\right)^{d-2}$$ για $d \geq 3$



Επαναληπτικότητα και παροδικότητα

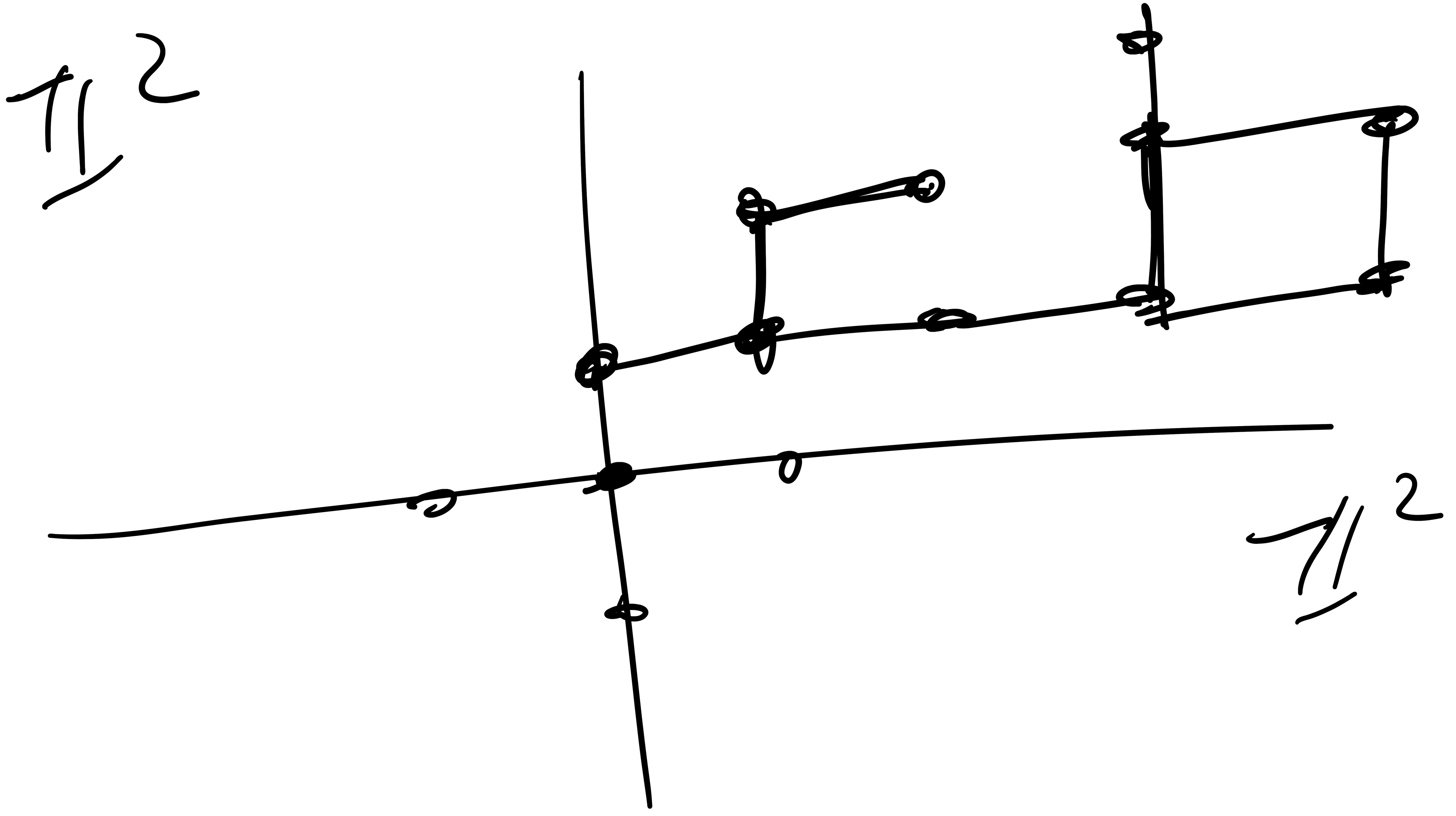
$$S_n = X_1 + \quad + X_n$$

Συμμετρικός απλός τυχ. περίπατος στο $\mathbb{Z}^d$

X_i ανεξ. ισόνομες

$$P(X_1 = e_i) = P(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d}$$

$\forall i = 1, 2, \ldots, d$.



$d \geq 3$

Η $(S_n)_{n \geq 0}$ Επαναληπτική στην $d=1,2$

παροδική στην $d \geq 3$