Σήμερα §11.2, $\underbrace{12.1, 12.2}_{\text{τύπος Itô}}$

Ανέλιξη Itô

Έχουμε $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρο πιθανότητας

$(B_t)_{t\geq 0}$ m-διάστατη κίνηση Brown

Ανέλιξη Itô λέμε κάθε ανέλ. $(X_t)_{t\geq 0}$ που γράφεται ως

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\,ds + \int_0^t v(s,\omega)\cdot dB_s$$

εσωτ. γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$

με

- X_0 $\mathcal{F}_0$ μετρήσιμη
- $u : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ προοδευτικά μετρήσιμη

  $v : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}^m$ μετρήσιμη, προσαρμοσμένη
- $\int_0^t |u(s,\omega)|\,ds < \infty$, $\int_0^t \sum_{i=1}^m v_i^2(s,\omega)\,ds < \infty$ με πιθανότητα 1.

προοδ. μετρήσιμη: $\forall\, t \geq 0$

η $u|_{[0,t]\times\Omega}$ είναι $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-

μετρήσιμη

u προοδ. μετρήσιμη $\Rightarrow$ $\int_0^t u(s,\omega)\,ds$ είναι

$[0,t]\times\Omega$, $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ $\quad\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη

$\varphi: A\times B \to \mathbb{R}$

$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ - μετρήσιμη με $\int|\varphi|\,d\mu\,d\nu < \infty$

τότε η $h(x) = \int \varphi(x,y)\,d\nu(y)$

είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη

$$\int_0^t \sum_{i=1}^m v^i(s,\omega)\,dB_s^{(i)}$$

$$B = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$dX_t = u(t,\omega)\,dt + v(t,\omega)\cdot dB_t$$

Επέκταση του στοχαστικού ολοκληρώματος

X ανέλιξη Itô όπως πιο πάνω

ορίζουμε

$$\int_0^t Y(s,\omega)\,dX_s = \int_0^t \underline{Y(s,\omega)u(s,\omega)\,ds}$$

$$+ \int_0^t Y(s,\omega)\,v(s,\omega)\cdot dB_s$$

για κατάλληλες ανελίξεις Y.

Έστω Y προοδ. μετρήσιμη

$$\int_0^t |Y u|\,ds < \infty$$

$$\int_0^t Y^2(s,\omega)\sum_{i=1}^m \left(v^i(s,\omega)\right)^2 ds < \infty$$

με πιθανότητα 1

Κεφάλαιο 12 Ο Τύπος Itô

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g, f \in C^1(\mathbb{R})$

$$d f(g(t)) = f'(g(t))\, g'(t)\, dt$$
$$= f'(g(t))\, dg(t)$$

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(t))\, dg(t) \quad \otimes$$

Τι γίνεται όταν η $g(t) = B_t$;

κίνηση Brown

$d f(B_t) = ;$

Τότε η $\otimes$ δεν ισχύει

Πρόταση (Τύπος Itô I)

B μονοδιάστατη Κ.Β.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με f', f'' συνεχείς

(Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$)

Τότε

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$$

$\forall t \geq 0$

με πιθανότητα 1.

Γράφαμε

$$df(B_t) = f'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\,dt$$

"Απόδ"

$$\sum_{i=1}^{k_n} f\left(B_{t_{i-1}^{(n)}}\right)\left(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \longrightarrow \int_0^t f(B_s)\,dB_s$$

$$\text{''} \qquad \left(\qquad\qquad \right)^2 \longrightarrow \int_0^t f(B_s)\,ds$$

$$D_n = \left\{ 0 = t_0^{(n)} < \qquad\qquad < t_{2^n}^{(n)} = t \right\}$$

$$t_i^{(n)} = \frac{i\,t}{2^n}$$

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^{2^n} \left\{ f\left(B_{t_i^{(n)}}\right) - f\left(B_{t_{i-1}^{(n)}}\right) \right\}$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{2^n} \Big\{ f'\big(B_{t_{i-1}^{(n)}}\big)\big(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}\big) + \frac{1}{2} f''\big(B_{t_{i-1}^{(n)}}\big)\big(\qquad \big)^2 \Big\}$$

$$\longrightarrow \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds$$

$$(dB_t)^2 = dt$$

$$(dg_t)^2 = (g'(t))^2 (dt)^2$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = t^2 \frac{2^n}{2^{2n}} \longrightarrow 0$$

Εφαρμογή B Τ.Κ.Β. τότε

$$\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

ισχύει με πιθανότητα 1.

Απόδ.

$$d(B_t^2) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=x^2}}{=} d f(B_t) = f'(B_t)\, dB_t$$

$$+ \frac{1}{2} f''(B_t)\, dt = 2 B_t \, dB_t + \frac{1}{2} 2 \, dt$$

με πθ. ισχύει

$$\Rightarrow B_t^2 - B_0^2 = 2 \int_0^t B_s \, dB_s + t$$

$$\Rightarrow B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s \, dB_s$$

Άσκηση 12.1 $\quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$\int_0^t B_s^n \, dB_s = \frac{1}{n+1} B_t^{n+1} - \frac{1}{2} n \int_0^t B_s^{n-1} \, ds$$

$\forall t>0$ με πιθανότητα 1. $\quad B = \tau.\kappa.B$

Λύση

$$f(x) = x^{n+1} \in C^2(\mathbb{R})$$

$$d\left(B_t^{n+1}\right) = (n+1) B_t^n \, dB_t + \frac{1}{2} n(n+1) B_t^{n-1} \, dt$$

$$\left(df(B_t) = f'(B_t) \, dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) \, dt \right)$$

$$B_t^{n+1} - B_0^{n+1} = (n+1) \int_0^t B_s^n \, dB_s + \frac{1}{2} n(n+1) \int_0^t B_s^{n-1} \, ds$$

$$\Rightarrow \frac{B_t^{n+1}}{n+1} = \int_0^t B_s^n \, dB_s + \frac{n}{2} \int_0^t B_s^{n-1} \, ds$$

Περίληψη (Τύπος Itô II)

B κίνηση Brown (μονοδιάστατη)

$$f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$$

(Δηλ. $f = f(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$

$\dfrac{\partial f}{\partial t}$ συνεχής στο $[0,\infty)$)

Με πιθανότητα 1, για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$f(B_t,t) - f(B_0,0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s,s)\,ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s,s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s,s)\,ds$$

$f(x)$

Γρ. διαφ.

$$d f(B_t,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(B_t,t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(B_t,t)\,dB_t$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t,t)\,dt$$

Άσκηση Ν.δ. ότι για κάθε $t>0$ ισχύει

$$\int_0^t e^{s/2} \cos(B_s)\, dB_s = e^{t/2} \sin B_t$$

B = τ.κ.Β.

Λύση

$$f(x,t) = e^{\frac{t}{2}} \sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} f, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{t}{2}} \cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{\frac{t}{2}} \sin x$$

$$d\left(e^{\frac{t}{2}} \sin B_t\right) = d\left(f(B_t,t)\right) = \frac{\partial f}{\partial t}(\ )\, dt$$

$$+ \frac{\partial f(\ )}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt$$

$$= \underline{\frac{1}{2} f(B_t,t)\, dt} + e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t$$

$$+ \underline{\frac{1}{2}\left(-e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)\right) dt} = e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t$$

$$\overset{=1}{e^{\frac{t}{2}}}\sin(B_t) - e^{0}\underbrace{\sin(B_0)}_{0} = \int_0^t e^{\frac{s}{2}}\cos(B_s)\,dB_s$$

<u>Άσκηση</u> N.δ. ότι $X_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}$

($\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά) είναι martingale.

B = Τ.Κ.Β.

Λύση

$$f(x,t) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t}$$

$$dX_t = d(f(B_t,t)) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dB_t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt = \underline{-\frac{\lambda^2}{2}f\,dt} + \lambda f\,dB_t$$

$$\underline{+\frac{1}{2}\lambda^2 f\,dt} = \lambda e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}dB_t$$

$$f(B_t,t) = f(B_0,0) + \lambda\int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s}dB_s$$

$$= 1 + \lambda\int_0^t \text{-- --}\,dB_s$$

Το στοχαστικό ολοκλ. είναι martingale αρκεί να έχουμε $e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s} \in \mathcal{H}^2[0,t]$

$\forall t > 0$

$$E\left(\int_0^t \left(e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s}\right)^2 ds \right) =$$

$$= E\left(\int_0^t e^{2\lambda B_s - \lambda^2 s} ds \right) =$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda^2 s} E\left(e^{2\lambda B_s}\right) ds$$

$B_s \overset{d}{=} \sqrt{s}\, Z$

$$= \int_0^t e^{-\lambda^2 s} e^{\frac{1}{2}(2\lambda \sqrt{s})^2} ds$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda^2 s + 2\lambda^2 s} ds < \infty$$

$f : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\nabla_x f(x,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,t), \quad , \frac{\partial f}{\partial x_d}(x,t) \right)$$

$$\Delta_x f(x,t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t)$$

Επόμενο $d f(B_t, t)$ με B_t d-διάστατη Κ.Β.

Πρόταση $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$

B d-διάστατη Κ.Β. τότε με π.θ.-1 ισχύει

$$f(B_t,t) - f(B_0,0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s,s)\,ds + \int_0^t \nabla_x f(B_s,s)\cdot dB_s$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_x f(B_s,s)\,ds$$

$\forall t>0$.

Γράφουμε

$$d f(B_t,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dB_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\, dt$$

Άσκηση 12.4 B, W ανεξάρτητες Κ.Β.

$d(\cos(B_t W_t)) = ;$

Λύση

$\begin{pmatrix} B_t \\ W_t \end{pmatrix}$ είναι διδιάστατη Κ.Β.

$$f(\overset{B_t}{x}, \overset{W_t}{y}, t) = \cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \cos(xy)$$

$$\Rightarrow d\left(\cos(W_t B_t)\right) = -W_t \sin(B_t W_t)\, \underline{dB_t}$$

$$- B_t \sin(B_t W_t)\, \underline{dW_t} + \frac{1}{2}\left(-B_t^2 - W_t^2\right)$$

$$\underline{\cos(B_t W_t)\, dt}$$

πυραλίεσον

$$df(B_t, t) = \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_x f}\right) dt + \nabla_x f \cdot dB_t$$

Αν $\frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_x f = 0$ τότε

$$f(B_t, t) = f(B_0, 0) + \int_0^t \nabla_x f(B_s, s)\, dB_s$$

$Y \geq 0$. $B_0 = a$

Then $f(B_t, t)$ local martingale

[is martingale iff $\nabla_x f(B_s, s) \in$

$\mathcal{H}^2[0,t]$ $\forall t > 0$

$f(B_t)$