$$\int_0^{\infty} X(s,\omega)\, dB_s \quad , \quad \int_a^b X(s,\omega)\, dB_s$$

$$\longrightarrow \quad 0 \le a < b$$

$$\mathcal{H}_0^2 [a,b)$$

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega) 1_{(t_i,\, t_{i+1}]}(t) \qquad (*)$$

$$a \le t_1 < \qquad < t_{k+1} \le b$$

$A_i$ είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμες

$$E(A_i^2) < \infty$$

$$\int_a^b X\, dB_s = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega) \overbrace{\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)}^{\mathcal{F}_b\text{-μετρήσιμες}} \qquad (**)$$

$$\mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_b$$

Αν $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$

$$E\left(\int_a^b X^2(s,\omega)\, ds\right) < \infty$$

$$\int_a^b X\,dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_a^b X_n\,dB_s$$

Ιδιότητες του $\int_a^b X\,dB_s$

---

Έστω $0 \le a < \gamma < b$, $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$

Τότε

1) Η $\int_a^b X\,dB_s$ είναι $\mathcal{F}_b$-μετρήσιμη

2) $$\int_a^b X\,dB_s = \int_a^\gamma X\,dB_s + \int_\gamma^b X\,dB_s$$

3) $$E\left(\int_a^b X\,dB_s \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right) = 0$$

με πιθ. 1.

4) $$E\left(\left(\int_a^b X\,dB_s\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right) = E\left(\int_a^b X^2\,ds \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right)$$

με πιθανότητα 1.

"Απόδειξη"

1) Αν $X \in \mathcal{H}_0^2[a,b]$ όπως στην (*) τότε η (**) δείχνει ότι $\int_a^b X \, dB$ είναι $\mathcal{F}_b$-μετρήσιμη.

Αν $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$ ...

3) Αν $X \in \mathcal{H}_0^2[a,b]$.

Από την (**) έχουμε

$$E\left( \sum_{i=1}^{k} A_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \Big| \mathcal{F}_a \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} E\left( A_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \Big| \mathcal{F}_a \right)$$

$A_i$: $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρ. $\qquad B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$: $\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{t_i}$

$$E\left( \quad \big| \mathcal{F}_a \right) = E\left( E\left( \quad \big| \mathcal{F}_{t_i} \right) \big| \mathcal{F}_a \right)$$

$$= E\left( A_i \, E\left( \underbrace{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}}_{} \big| \mathcal{F}_{t_i} \right) \Big| \mathcal{F}_a \right)$$

$$= E(A_i\, E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mid \mathcal{F}_a) = 0$$

<u>9.4</u> Αν $f, g \in \mathcal{H}^2$

$$\left( \begin{array}{l} f, g : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R} \\ E \int\limits_{\mathbb{R}^2} f^2(s,\omega)\, ds < \infty, \end{array} \right]$$

τότε $E(I(f)I(g)) = E\left(\int_0^\infty f(t,\omega)\, g(t,\omega)\, dt\right)$

$$\left( I(f) = \int_0^\infty f(t,\omega)\, dB_t \right)$$

λύση

όταν $f = g$ η σχέση λέει

$$E(I(f)^2) = E\left(\int_0^\infty f^2(t,\omega)\, dt\right)$$

Δηλ. $\| I(f) \|^2_{L^2(P)} = \| f \|^2_{L^2(\lambda \times P)}$

οι $L^2(P)$, $L^2(\lambda \times P)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο.

$$\left( \langle X, Y \rangle = E(XY), \quad \langle f, g \rangle = \iint_0^\infty f(t,\omega)\, g(t,\omega)\, dt\, dP \right.$$

Η $I : L^2(\lambda \times P) \to L^2(P)$

είναι γραμμική και ισομετρία.

Θέλουμε

$$\langle I(f), I(g) \rangle_{L^2(P)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\lambda \times P)}$$

Αυτό γιατί ισχύει

$$\| I(f+g) \|^2 = \| f+g \|^2$$

$$\Rightarrow \langle I(f) + I(g), I(f) + I(g) \rangle$$

$$= \langle f+g, f+g \rangle \Rightarrow$$

$$\underline{\langle I(f), I(f) \rangle} + 2 \langle I(f), I(g) \rangle + \underline{\langle I(g), I(g) \rangle}$$

$$= \underline{\langle f, f \rangle} + 2 \langle f, g \rangle + \underline{\langle g, g \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle I(f), I(g) \rangle = \langle f, g \rangle$$

Δείτε τα 9.5, 9.6

9.9 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη

με $\int_0^1 f^2(t)\,dt<\infty$. $B$ Τ.Κ.Β.

Ν.δ. ότι η τ.μ.

$$X=\int_0^1 f(t)\left(\sin(B_t)+\cos(B_t)\right)dB_t$$

έχει διασπορά $Var(X)=\int_0^1 f^2(t)\,dt$

Λύση

Έχουμε $Y(t,\omega)=f(t)\left(\sin(B_t)+\cos(B_t)\right)$

Μετρήσιμη, προσαρμοσμένη $\mathcal{F}_t$

$$Y(t,\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$$

$$E\left(\int_0^1 Y^2(t,\omega)\,dt\right)\leq 4\int_0^1 f^2(t)\,dt<\infty$$

$$|a+b|^2\leq 2(a^2+b^2)\leq 4$$

Άρα $Y\in H^2[0,1]$. Άρα $E\left(\int_0^1 Y\,dB_t\right)=0$

Δηλ. $E(X)=0$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) =$$

$$= E\left( \int_0^1 f^2(t) \left(\cos(B_t) + \sin(B_t)\right)^2 dt \right)$$

$$= E\left( \int_0^1 f^2(t) \left( 1 + 2\cos(B_t)\sin(B_t)\right) dt \right)$$

$$= \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

$$+ \; 2 \underbrace{E\left( \int_0^1 f^2(t) \cos(B_t) \sin(B_t)\, dt \right)}_{=0}$$

$$\left( \begin{array}{c} E(\sin(B_t)) = 0 \\ B_t \overset{d}{=} -B_t \\ \sin(B_t) \overset{d}{=} \sin(-B_t) = -\sin(B_t) \\ EA = -EA \end{array} \right)$$

Then

$$B \overset{d}{=} -B \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(t) \sin(2B_t)\, dt \overset{d}{=} \int_0^1 f^2(t) \sin(-2B_t)\, dt$$

$= - \int_0^1 f^2(t) \sin(2B_t)\, dt \quad = \ldots$

9.7) $B$ Τ.Κ.Β, $0 \le a < b$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη

με $\int_a^b f^2(t)\, dt < \infty$. Ν.δ.ο.

η $Z(f) := \int_a^b f(t)\, dB_t \sim N(0, \sigma^2)$

με $\sigma_f^2 = \int_a^b f^2(t)\, dt$

Λύση

$X(t, \omega) = f(t) : [a, b] \times \Omega \to \mathbb{R}$

είναι μετρήσιμη, προσαρμοσμένη

$X(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρ.

ως σταθερή, $X \in \mathcal{H}^2[a, b]$

1) Αν η $f$ είναι της μορφής

$f(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \, 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$

με $a \le t_1 < \quad < t_{k+1} \le b$

$c_1, \quad , c_k \in \mathbb{R}$

τότε $f \in \mathcal{H}_0^2 [a, b)$ και

$$I(f) = \sum_{i=1}^{k} c_i \left( B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

είναι κανονική ως γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών.

$$E(I(f)) = 0$$

$$Var(I(f)) = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \, Var\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) = \int_a^b f^2(t)\,dt$$

2) Στη γενική περίπτωση.

Υπάρχουν $f_n : [a, b) \to \mathbb{R}$ κλιμακωτές αφιστερά συνεχείς με $\|f - f_n\|_{L^2[a,b)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Τότε $f_n \in \mathcal{H}_0^2(\epsilon,\theta)$ και

$$Z(f) = \lim_{n\to\infty} Z(f_n)$$ όριο στον $L^2(\underline{\theta})$

Άρα $Z(f_n) \Rightarrow Z(f)$

$$Z(f_n) \sim N(0, \sigma^2_{f_n})$$

επειδή $\sigma^2_{f_n} \to \sigma^2_f$

$$\left| \|f\|_{L^2} - \|f_n\|_{L^2} \right| \leq \|f - f_n\|_{L^2} \to 0$$

έπεται ότι $Z(f) \sim N(0, \sigma^2_f)$

$$\left[ \left. \begin{array}{l} X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2) \\ \mu_n \to \mu,\ \sigma_n^2 \to \sigma^2 \end{array} \right\} \Rightarrow X_n \Rightarrow X \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \right.$$

Κεφ. 10 Το ολοκλήρωμα ως ανέλιξη

Πρόταση Έστω $X \in \mathcal{H}_0^2$ και

$$I_t(X) = \int_0^t X(s,\omega)\, dB_s$$

Η ανέλιξη $(I_t(X))_{t \geq 0}$ είναι ένα συνεχές martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Απόδ.

Έστω ότι $X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} \underline{A_i(\omega)}\, 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$

όπου $0 \leq t_1 < \quad < t_{k+1}$.

$I_t(X)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη

$I_t(X) \in L^1(P)$ και $I_t(X) \in L^2 \subset L^2$

$\left( E(I_t(X)^2) = E\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\, ds\right) < \infty \right.$

Για $0<s<t$

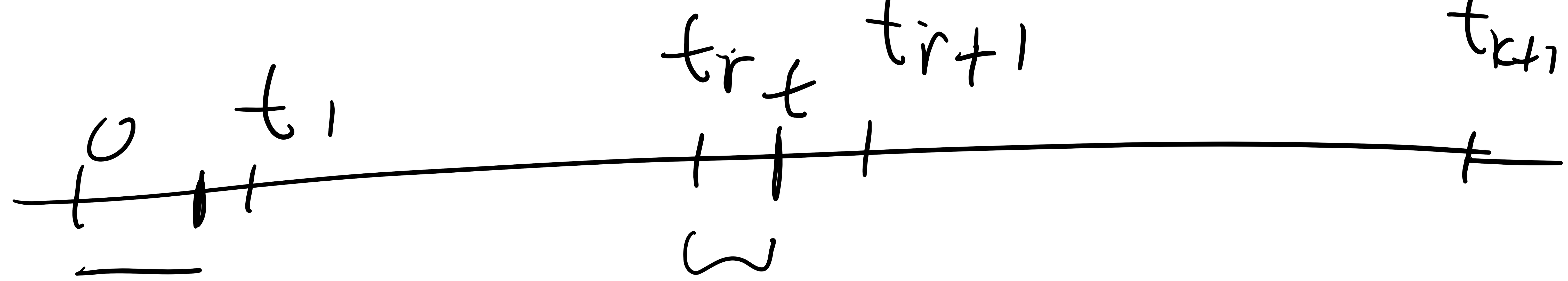
$$E\left(\int_0^t X(r,\omega)\,dr \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= E\Big(\underbrace{\int_0^s \cdots}_{\mathcal{F}_s\text{-μετρ.}} \,\Big|\, \mathcal{F}_s\Big) + E\left(\int_s^t \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right)$$

$$= I_s(X) + 0 = I_s(X)$$

Άρα $(I_t(X))_{t\geq 0}$ martingale.

Για το συνεχές




$\int_0^t X$

$$I_t(X) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t\in[0,t_1] \\ \sum_{i=1}^{r-1} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + A_r(B_t - B_{t_r}) & \text{αν } t\in[t_r, t_{r+1}] \text{ για } r=1,\dots,k \\ \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) & \text{αν } t\geq t_{k+1} \end{cases}$$

Σε ένα $t_{r+1}$

Αριστερά του έχει τούτο

$$\sum_{i=1}^{r-1} A_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) + \underbrace{A_r\left(B_t - B_{t_r}\right)}_{t \to t_{r+1}^-}$$

Δεξιά του

$$\sum_{i=1}^{r} A_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) + \underbrace{A_{r+1}\left(B_t - B_{t_{r+1}}\right)}_{t \to t_{r+1}^+}$$