Σήμερα: Κεφάλαιο 6.

$(B(t))_{t\geq 0}$ Κ.Β. στο $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{B(s) : s\in[0,t]\})$

$\mathcal{N} = -\quad - \quad N \subset A\,,\ P(A)=0$

$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N})$ ← επαυξημένη διήθηση

<u>Πρόταση</u> B όπως πιο πάνω

$C\subset\mathbb{R}^d$ κλειστό.

$T_C := \inf\{s\geq 0 : B(s)\in C\}$

Ο T_C είναι χρόνος διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Απόδ.

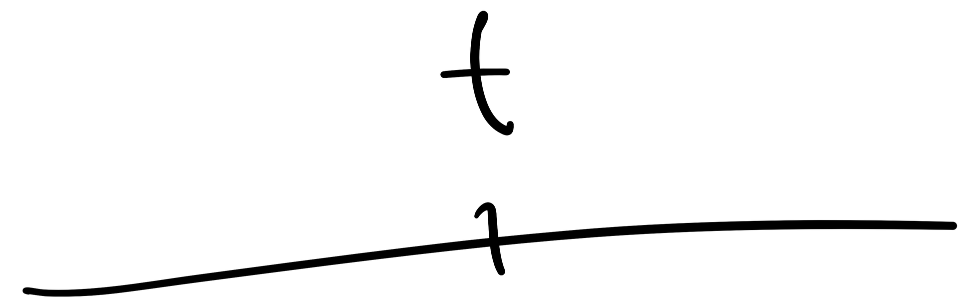
Έστω $\Omega_0\subset\Omega$: $t\mapsto B^{\omega}(t)$ συνεχής

$\forall\, \omega \in \Omega_0$. Θέλουμε

$$\{T_C \le t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \ge 0$$

$$\| $$

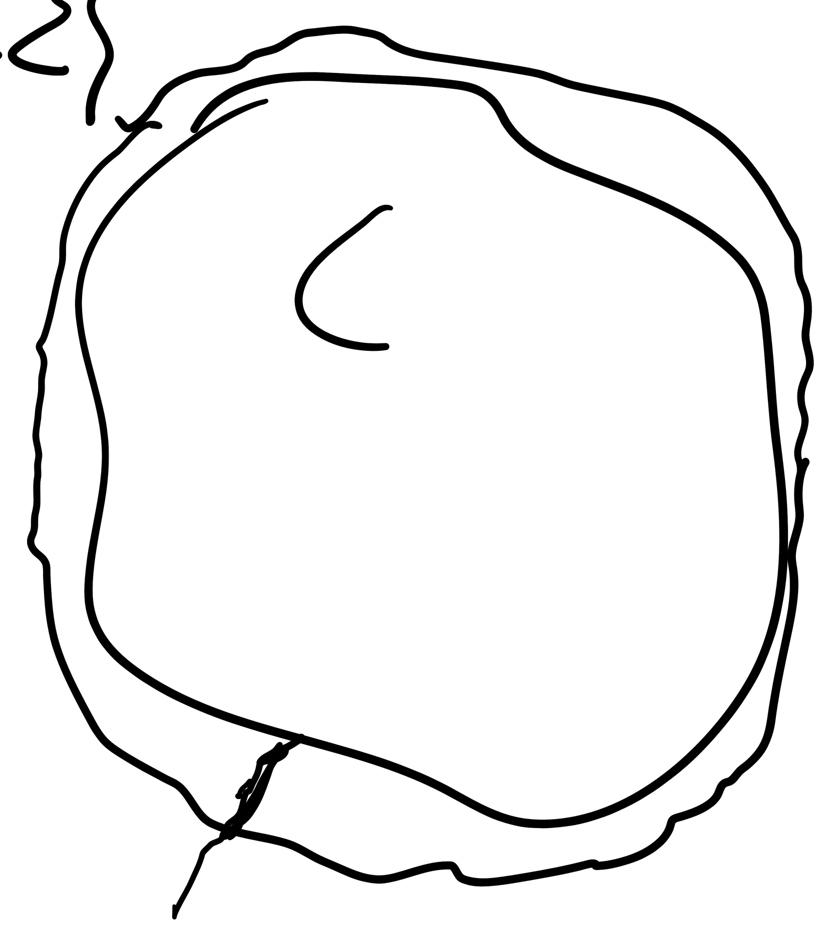
$$\bigcup_{s \le t} \underbrace{\{B(s) \in C\}}_{\in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t}$$



(t, ω)

$$C^{(\varepsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \exists\, y \in C : \|x-y\| < \varepsilon\}$$

$$A_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q \le t}} \underbrace{\{B(q) \in C^{(\frac{1}{n})}\}}_{\in \mathcal{F}_t^0}$$



$$\Omega_0 \cap \{T_C \le t\} = \Omega_0 \cap A_t$$

ω, $T_C(\omega) \le t$

$q_n \le t \qquad B(q_n) \in C^{(\frac{1}{n})} \qquad q_n \uparrow$

$B([0,t])$ συμπαγές $\leftarrow$

Η $B(q_n)$ έχει συγκλ. υπακολουθία

$$(B(q_{n_k}))_{k\geq 1} \qquad B(q_{n_k}) \to x_0$$

$$d(x_0, C) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \in C$$

$$\left(d(B(q_n), C) \leq \frac{1}{n} \right)$$

$$q_{n_k} \nearrow r \leq t \qquad B(r) = \lim B(q_{n_k}) = x_0 \in C$$

$$\Rightarrow T_C(\omega) \leq t$$

$$\{T_C \leq t\} = (\{T_C \leq t\} \cap (\Omega \setminus \Omega_0))$$

$$\cup (\{T_C \leq t\} \cap \Omega_0)$$

$$= \underbrace{(\{T_C \leq t\} \setminus \Omega_0)}_{\in \mathcal{N}} \cup \underbrace{(\Omega_0 \cap A_t)}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

$$(\text{a } \Omega_0 \in \mathcal{N} \Rightarrow \Omega \setminus \Omega_0 \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \Omega_0 \in \mathcal{F}_t$$

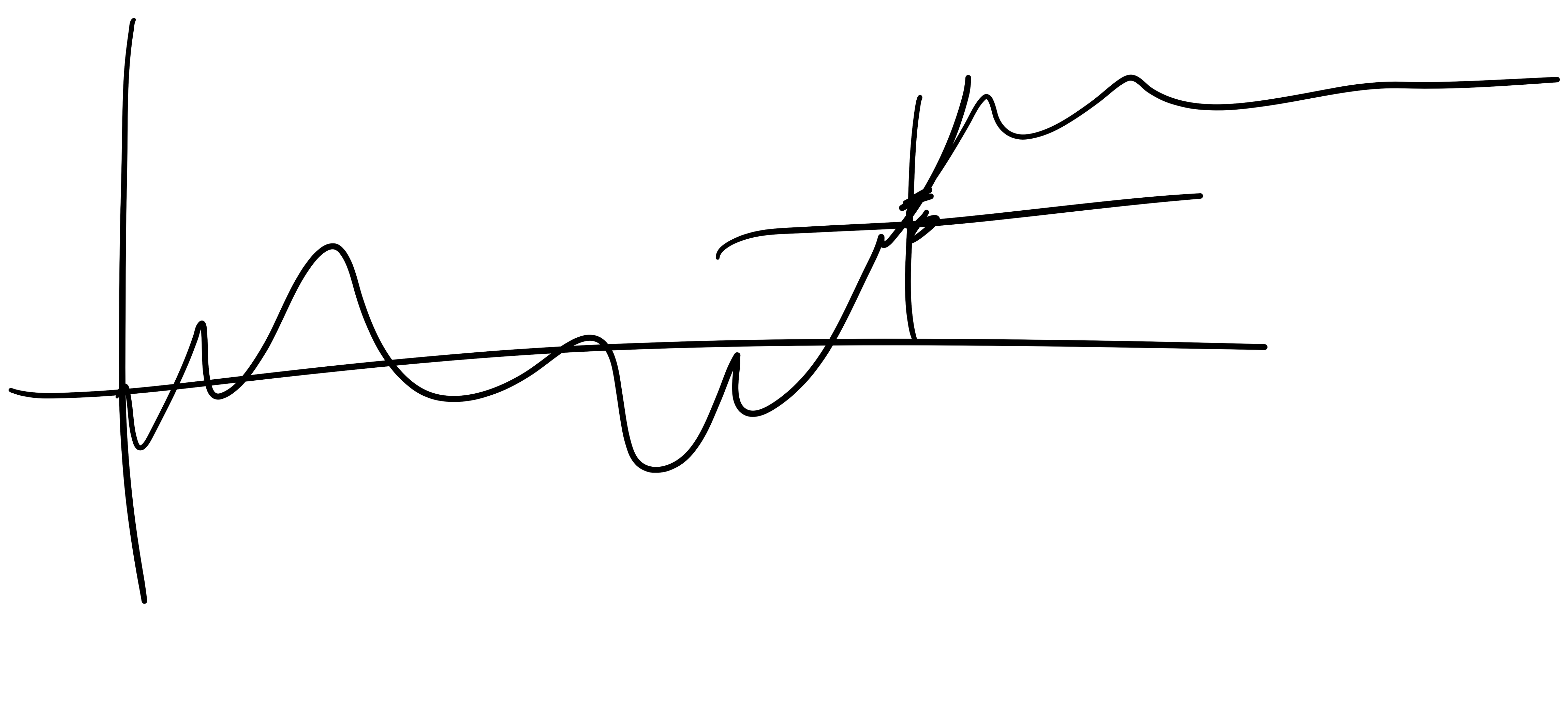
$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$$

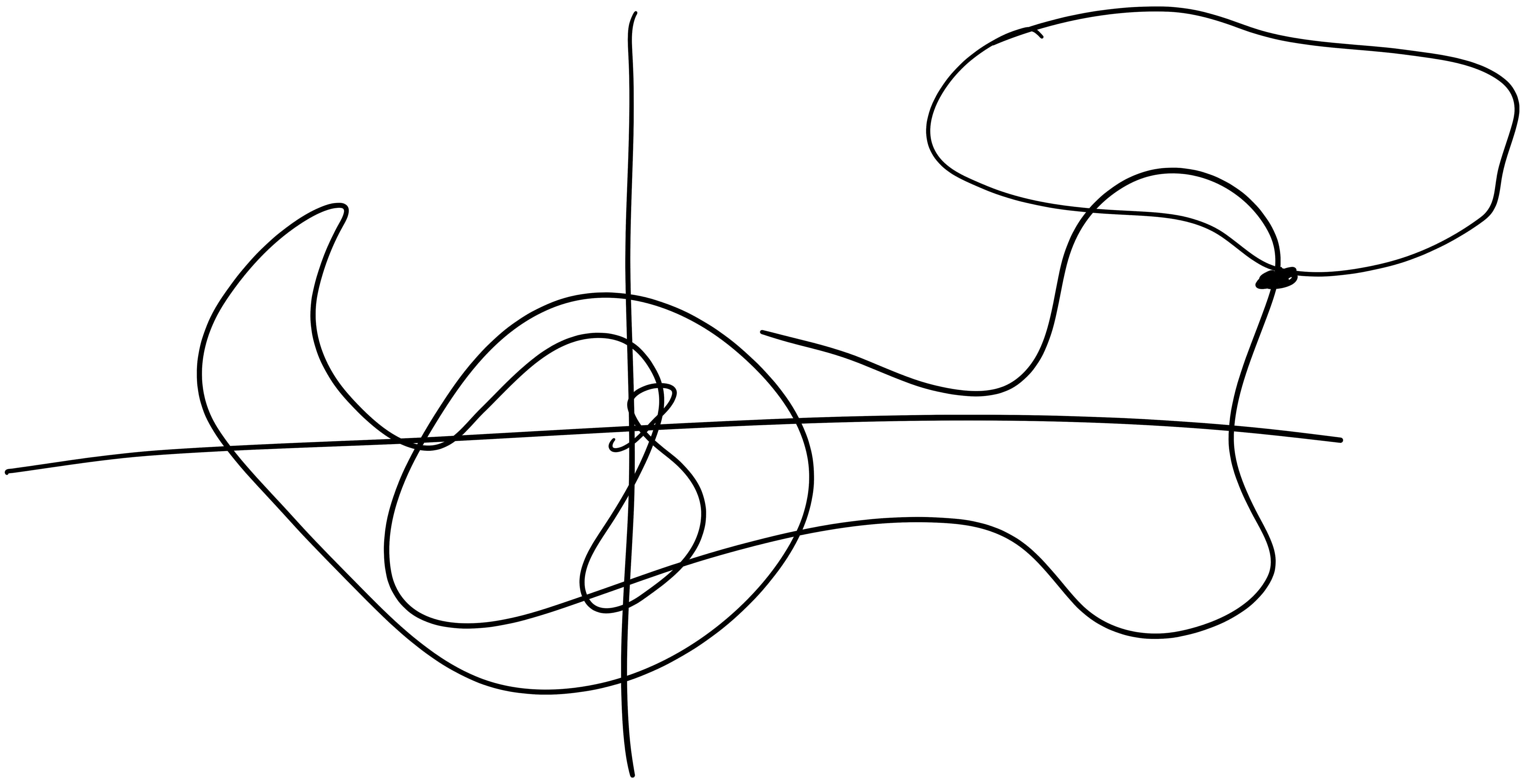
§ 6.2 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Αν $T : \Omega \to [0,\infty]$ χρόνος διακοπής

$$\mathcal{F}_T = \{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \ \ \forall t \ge 0 \}$$

__Θεώρημα__ B κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^d$, T χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ με τιμές στο $[0,\infty)$. Τότε η $X(t) := B(T+t) - B(T)$ είναι τυπική d-διάστατη κ.Β. ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_T$





Σημείωση: Η B έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov. Δηλ. $\forall\, t>0$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $T : \Omega \to [0,\infty)$ χρόνος διακοπής ισχύει

$$P(B(T+t) \in A \mid \mathcal{F}_T)$$

$$= P(B(T+t) \in A \mid B(T))$$

πράγματι το αριστερό μέλος ισούται με

$$E\Big(1_{\underset{\underset{B(T+t)-B(T)}{\shortparallel}}{X(t)}+B(T)\in A} \;\Big|\; \mathcal{F}_T\Big)$$

$X(t) \to \mathcal{F}_T$-ανεξάρτητη

(Πρότ. 2.13
$$E(h(X,Y) \mid \mathcal{G}) = E\,h(x,Y)\Big|_{x=X}$$
$Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$)

$$= E\left(1_{X(t)+x\in A}\right)_{x=B(T)}$$

$$= E\left(1_{X(t)+B(T)\in A} \mid B(T)\right)$$

$\perp\!\!\!\perp B(T)$

$$= P\left(B(T+t)\in A \mid B(T)\right)$$

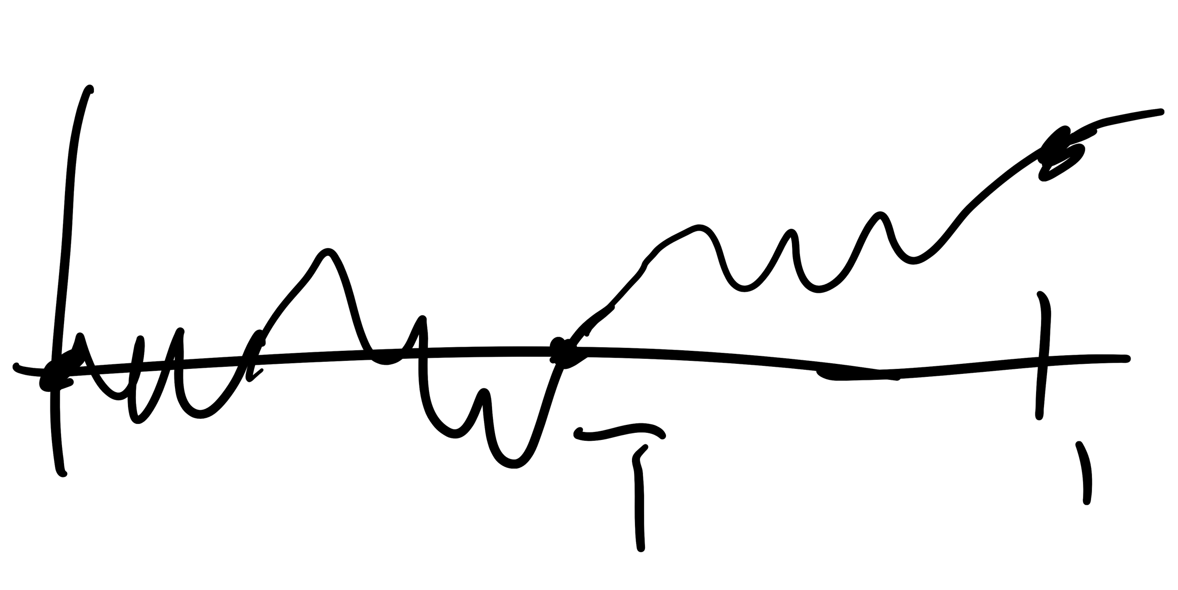
<u>Παρατήρηση</u> B μονοδιάστατη Τ.Κ.Β

$$T = \sup\{t\in[0,1] : B(t)=0\}$$

i) $P(T<1)=1$

ii) Ο T δεν είναι χρόνος διακοπής

Λύση



i) Αν $T=1$ τότε $t_n \nearrow T$

$$B(T)=0 \qquad B(t_n)=0$$

δηλ. $B(1)=0$

όμως $P(\underbrace{B(1)}_{\sim N(0,1)}=0)=0$

ii) Αν ο T ήταν χρόνος διακοπής

τότε η $X(t)=B(T+t)-B(T)$

$$= B(T+t)$$

θα ήταν τ.κ.Β.

Αυτό δεν ισχύει όμως γιατί

$$X(t)>0 \quad \forall\, t\in(0,\underbrace{1-T}_{>0})$$

$1-T$

T^+

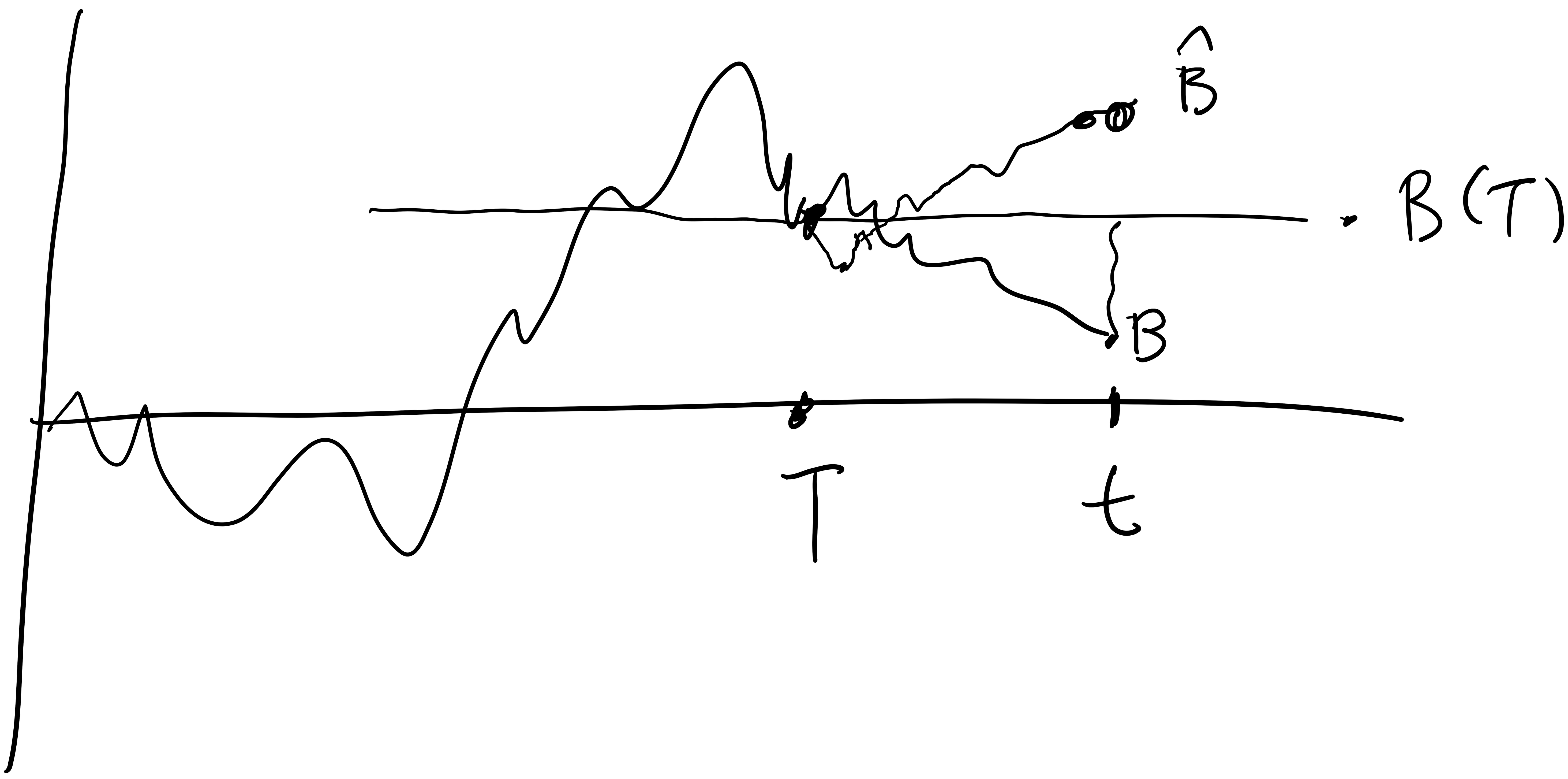
T^-

... Αλλιώς από πρότ. 3.14

§6.3 Η αρχή της ανάκλασης

B μονοδιάστατη Τ.Κ.Β

T χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ με τιμές στο $[0,\infty)$.



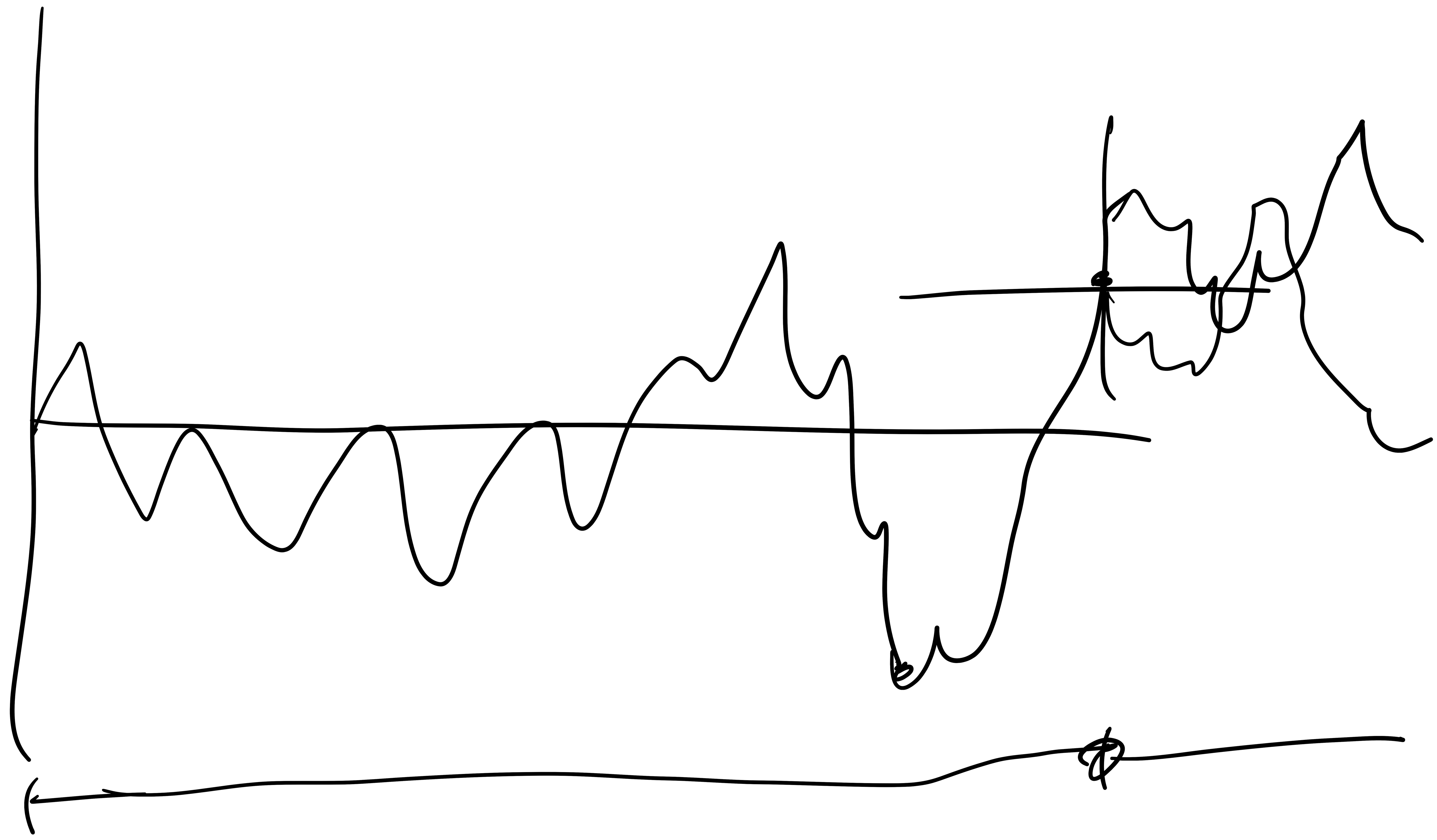
Θεωρούμε την ανάκλαση

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} B(t) & \text{αν } t\in[0,T] \\ 2B(T)-B(t) & \text{αν } t\geq T \end{cases}$$

$$B(T) - (B(t) - B(T))$$

Πρόταση: Η $\hat{B}$ είναι Τ.Κ.Β

Ιδέα



Β: $B|[0,T]$, $X(t)=B(T+t)-B(T)$

$$B_1 \perp B_2$$

$$\underline{B_1} \qquad \underline{-B_2}$$

$$(B_1, B_2) \qquad (B_1, -B_2)$$

$X, Z, \quad Z \sim N(0,1)$

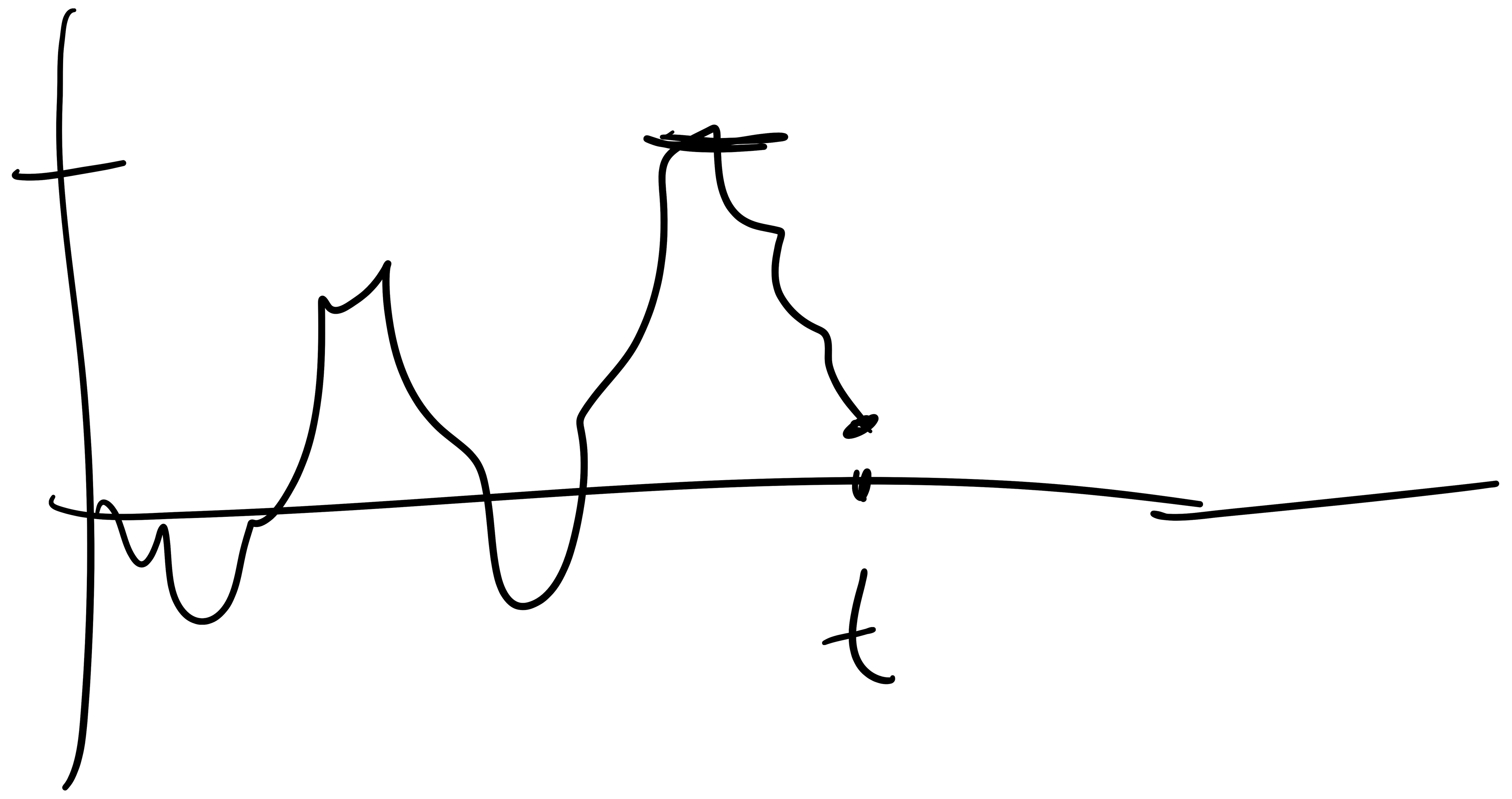
$$X+Z \overset{d}{=} X-Z$$

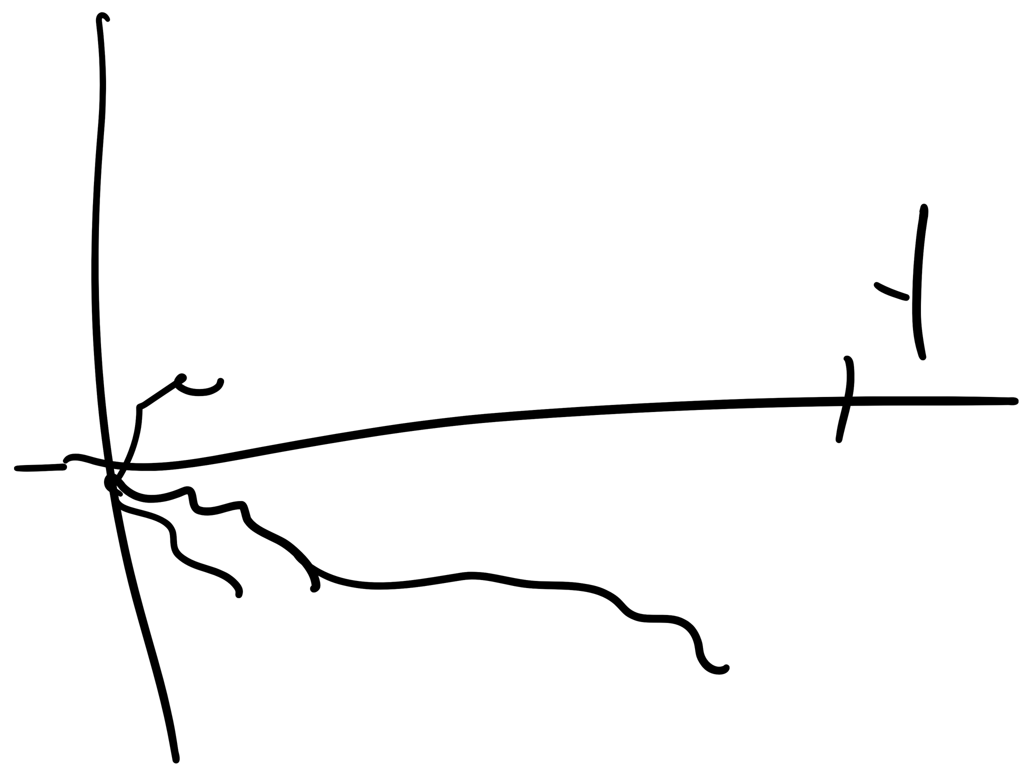
$$(X,Z) \stackrel{d}{=} (X,-Z)$$

<u>Εφαρμογή</u> Β Τ.Κ.Β.

$$M(t) := \sup\{B(s) : s\in[0,t]\}$$

$t \geq 0$





$M(t) > 0$ για $t>0$ με π.θ. 1.

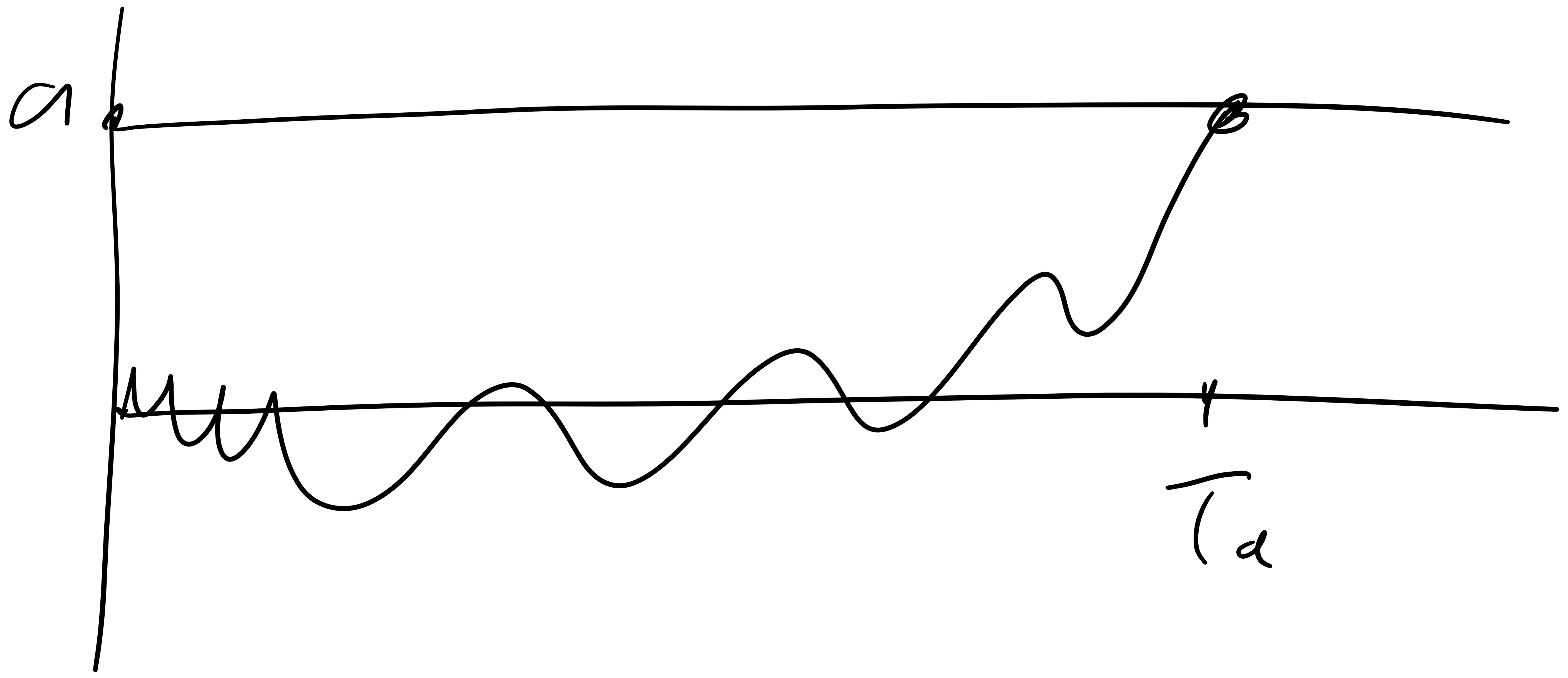
Θ.δ. ότι $M(t) \stackrel{d}{=} |B(t)|$

<u>Πρόταση</u> Για $t, a > 0$ ισχύει

$$P(M(t) \geq a) = 2P(B(t)\geq a) = P(|B(t)|\geq a)$$

Απόδ.

Έστω $T_a := \inf\{s \geq 0 : B(s) = a\}$. Είναι χρόνος διακοπής, πεπερασμένος με π.θ. 1.



Έστω $\hat{B}$ η κίνηση στην αρχή ανάκλασης.

$B(t)$

$$P(M(t) \geq a) = P(M(t) \geq a,\ B(t) > a)$$

$$+\ P(\underbrace{M(t) \geq a,\ B(t) < a})$$

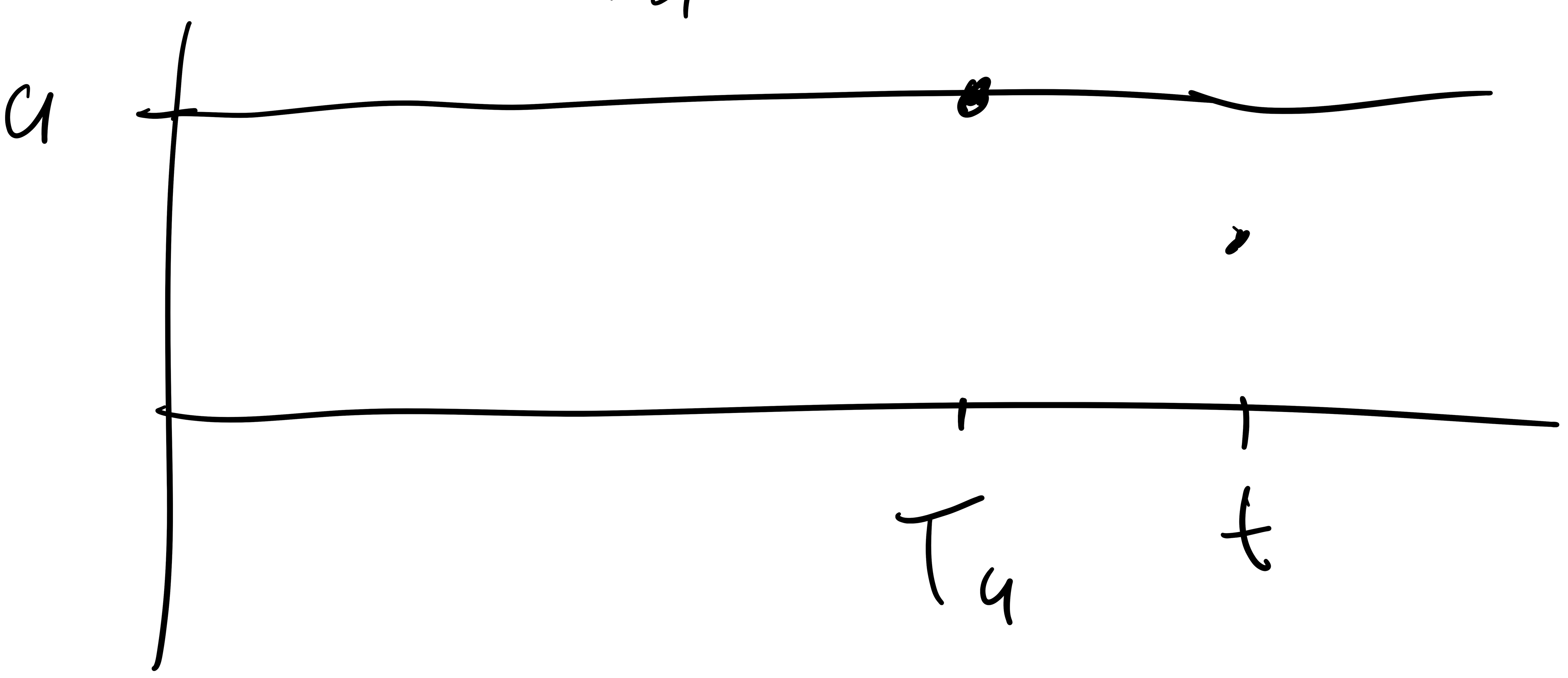
$$= P(B(t) > a) + P(\hat{B}(t) > a) \quad (*)$$

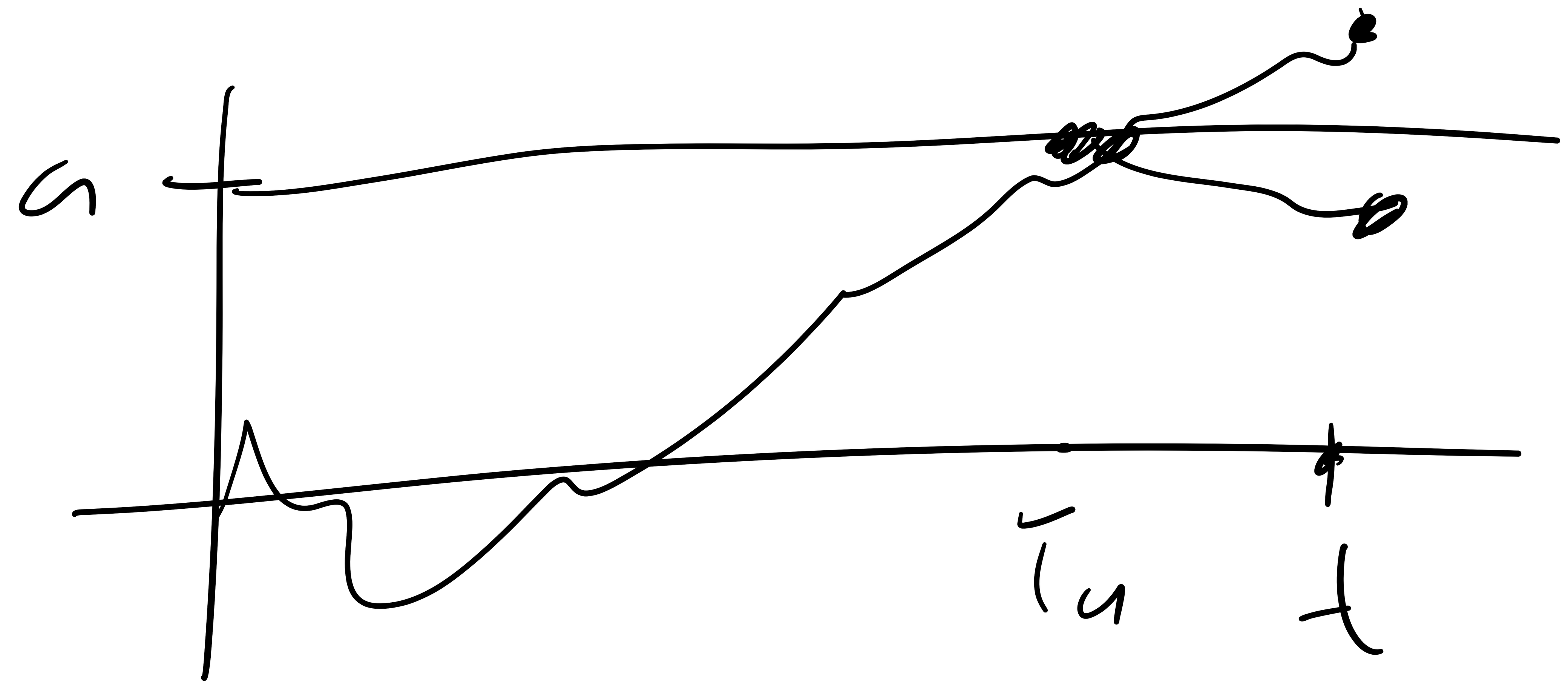
Αυτό γιατί

$$\{M(t) \geq a,\ B(t) < a\} \cap \Omega_0 = \{\hat{B}(t) > a\} \cap \Omega_0$$

$\Rightarrow T_a \leq t$

t





$[0,t]$

$\hat{B} = B$

(*) $\Rightarrow$

$$P(M(t) \ge a) = P(B(t) > a) + P(B(t) > a)$$

$$= 2P(B(t) > a) = P(|B(t)| > a)$$

γιατί

$$P(|B(t)| > a) = P(B(t) > a) + P(B(t) < -a) = 2P(B(t) > a)$$

$$-B \overset{d}{=} B$$

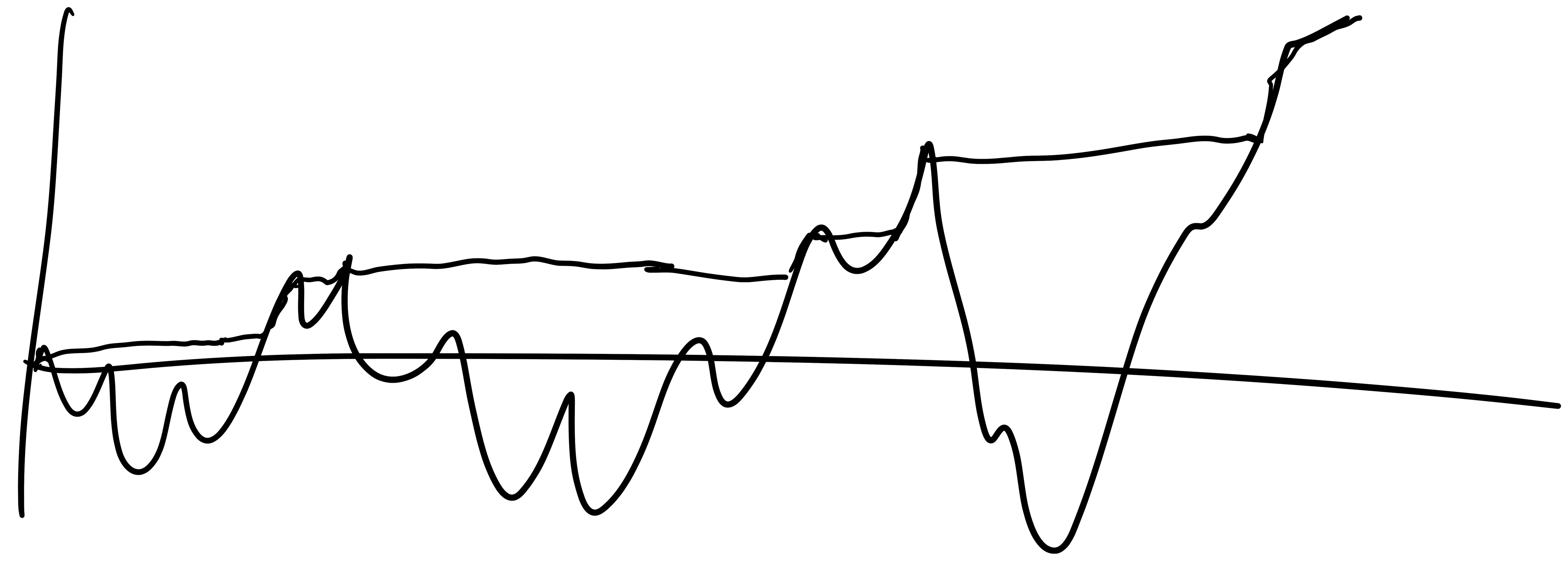
$$M(t) \overset{d}{=} |B(t)| \overset{d}{=} \sqrt{t}\,|Z| \quad \forall t \ge 0$$

$$Z \sim N(0,1)$$

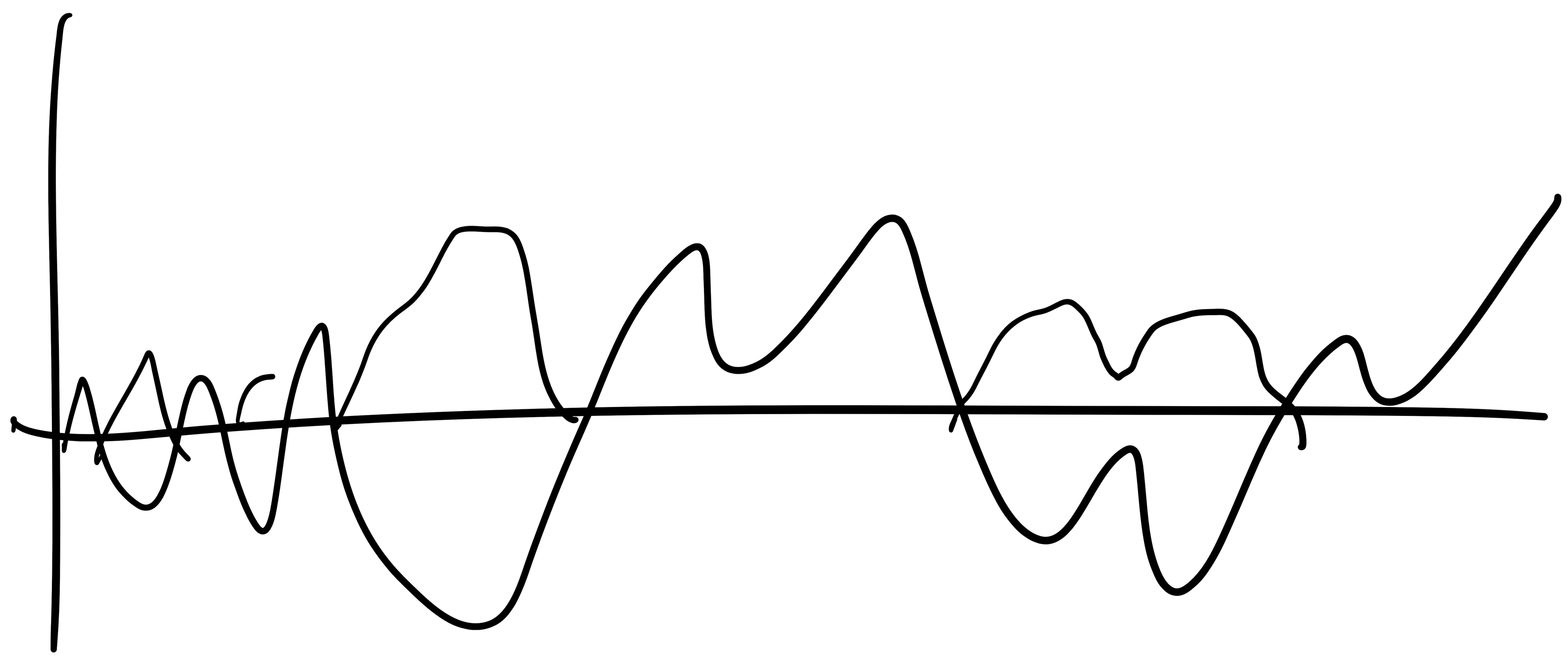
Οι ανελίξεις

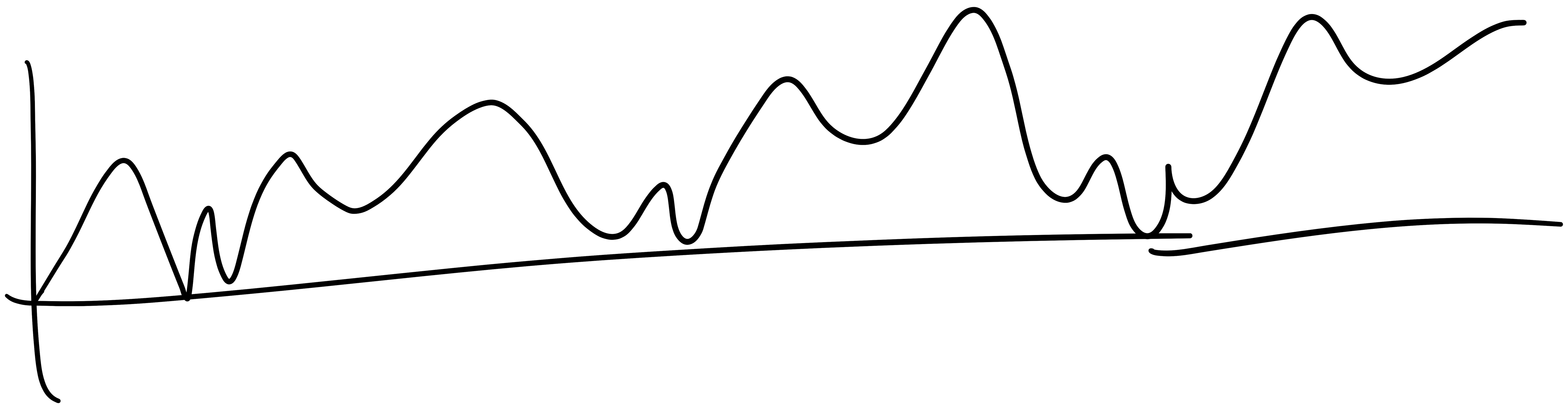
$M = (M(t))_{t \ge 0}$, $(|B(t)|)_{t \ge 0}$ δεν

έχουν την ίδια κατανομή.



M, $|B|$





$C[0,\infty)$

$A = \{ f \in C[0,\infty) : f \nearrow \}$

[illegible] $\quad P(M \in A) = 1$

$\quad P(|B| \in A) = 0$

§6.4 $\quad Z(\omega) = \{ t \geq 0 : B^{\omega}(t) = 0 \}$

$\lambda(Z(\omega)) = 0$

$Z(\omega) \subseteq \mathbb{R}$ $\quad$ ts P, Θ, 1

$\dim_H(Z(\omega)) = \frac{1}{2}$

Hausdorff διάσταση

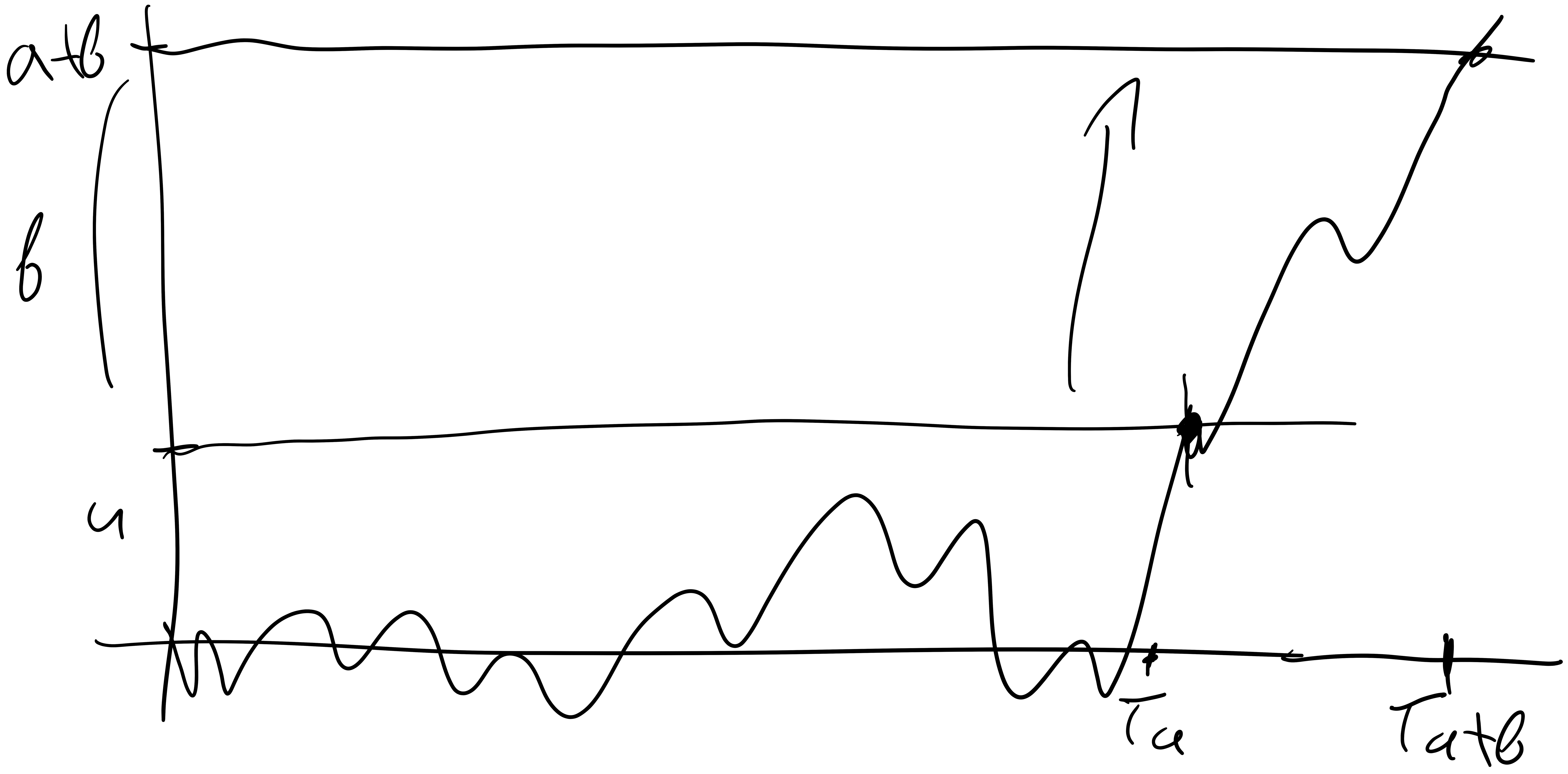
<u>Εφαρμογή</u> B τ.κ.B.

$T_r = \inf\{s > 0 : B(s) = r\} \quad r \in \mathbb{R}$

Έστω $a, b > 0$ και X, Y ανεξ. τ.μ. ώστε $X \overset{d}{=} T_a$, $Y \overset{d}{=} T_b$

Τότε $X + Y \overset{d}{=} T_{a+b}$

Λύση



έστω $Z(t) = B(T_a + t) - B(T_a)$

Τότε $T^B_{a+b} = \underline{T^B_a} + \underline{T^Z_b} \overset{d}{=} X + Y$

$B|[0, T_a]$

$T^B_a \perp\!\!\!\perp Z$

$\perp\!\!\!\perp T^Z_b \overset{d}{=} T^B_b$

$(\underline{\underline{T^B_a}}, T^Z_b) \overset{d}{=} (X, Y)$