Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 5 Φεβρουαρίου 2019

Σε όλα τα θέματα πιο κάτω, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. (20 Βαθμοί) Για κάθε $t \geq 0$ θέτουμε $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$. Έστω $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{k+1}$ και $\{A_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$ τυχαίες μεταβλητές ώστε η A_i να είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη και $\mathbf{E}(A_i^2) < \infty$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Θεωρούμε την ανέλιξη $X = (X_t)_{t\geq 0}$ με

$$X_t := \sum_{i=1}^{k} A_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

για κάθε $t \geq 0$.
(α) Να υπολογιστεί το $I := \int_0^\infty X_s \, dB_s$.
(β) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(I^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X_s^2 \, ds\right).$$

2. (15 Βαθμοί) Έστω B_t, W_t δυό ανεξάρτητες μονοδιάστατες τυπικές κινήσεις Brown. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 το σύνολο $\{t \geq 0 : B_t = W_t\}$ είναι μη φραγμένο.

3. (25 Βαθμοί) (α) Για κάθε $c \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η ανέλιξη $X_t := e^{-\frac{c^2 t}{2}} \left(e^{-cB_t} + e^{cB_t}\right)$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ όπου $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$ για κάθε $t \geq 0$.
(β) Έστω $a > 0$ και $\tau := \inf\{s \geq 0 : |B_s| = a\}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda\tau}) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}$$

για κάθε $\lambda \geq 0$.

4. (15 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι

$$\sup_{t\geq 1} \frac{B_t}{t} \stackrel{d}{=} |B_1|.$$

5. (15 Βαθμοί) Έστω $X_t := \int_0^t s \, dB_s$, $Y_t := \int_0^t B_s \, ds$ για κάθε $t \geq 0$.
(α) Να υπολογιστεί το X_t αν είναι γνωστές οι ποσότητες B_t, Y_t.
(β) Να υπολογιστεί η διασπορά της X_t και η $\mathrm{Cov}(X_t, B_t)$.

6. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= -\beta(X_t - \alpha)\, dt + \sigma \, dB_t, \\ X_0 &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\beta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ γνωστές σταθερές.
(α) Να βρεθεί μια λύση της (1) [Υπόδειξη: Υπολογίστε το διαφορικό $d(e^{\lambda t} X_t)$ και επιλέξτε κατάλληλο λ]. Είναι αυτή η λύση μοναδική;
(β) Για τη λύση που βρέθηκε στο (α), να δειχθεί ότι καθώς $t \to \infty$, η X_t συγκλίνει κατά κατανομή σε τυχαία μεταβλητή Y με τιμές στο $\mathbb{R}$ και να προσδιοριστεί η κατανομή της Y.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Σχόλια

1. Θεωρία.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι η ανέλιξη $X_t := (B_t - W_t)/\sqrt{2}, t \geq 0$ είναι τυπική κίνηση Brown, γιατί τότε το συμπέρασμα θα έπεται από το ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $\underline{\lim}_{t\to\infty} X_t = -\infty, \overline{\lim}_{t\to\infty} X_t = \infty$. Η X_t είναι Τ. Κ. Β. γιατί ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού (εύκολα ελέγχεται αυτό).

4. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα αντιστροφής χρόνου.

$$\sup_{t\geq 1} \frac{B_t}{t} = \sup_{0<s\leq 1} \frac{B_{1/s}}{1/s} = \sup_{s\in(0,1]} sB_{1/s} \stackrel{d}{=} \sup_{s\in[0,1]} B_s \stackrel{d}{=} |B_1|.$$