Στοχαστικός Λογισμός

Ενδιάμεση εξέταση 1 Δεκεμβρίου 2018

Στις ασκήσεις 4-7, η $(B(t))_{t\geq 0}$ είναι τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διήθηση σε αυτόν, και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingale ως προς αυτή τη διήθηση με $X_0 = 0$ και $\mathbf{E}(X_i^2) < \infty$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Δίνονται επίσης οι ποσότητες $a_i = \mathbf{E}\{(X_i - X_{i-1})^2\}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$.
(α) Να δειχθεί ότι για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^+$ με $i \neq j$ ισχύει $\mathbf{E}\{(X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})\} = 0$.
(β) Να υπολογιστεί ως συνάρτηση των $\{a_i : i \in \mathbb{N}^+\}$ η $\mathrm{Var}(X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $c > 0, a < 0 < b$, και $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = a) = \mathbf{P}(X_1 = b) = 1/2$. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},\\
&\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \text{για κάθε } n \geq 1,\\
&S_0 := 0,\\
&S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για κάθε } n \geq 1,
\end{aligned}$$

και $M_n := c^{S_n - nr}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ όπου $r \in \mathbb{R}$ σταθερά. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς r ως συνάρτηση των a, b, c ώστε η ακολουθία $(M_n)_{n\geq 0}$ να είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διήθηση σε αυτόν.
(α) Ποιες τυχαίες μεταβλητές ονομάζουμε χρόνους διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
(β) Να δειχθεί ότι ο T είναι χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. (10 Βαθμοί) (α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B(1) - B(2) + 2B(4)$;
(β) Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $\int_0^1 e^{iB(2t)}\, dt$;

5. (10 Βαθμοί) Για κάθε $t \geq 0$ θέτουμε $X_t := B(t) - tB(1)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = (s \wedge t) - st$$

για κάθε $s, t \in [0, 1]$.

6. (15 Βαθμοί) Για κάθε $t \geq 0$ θέτουμε

$$\begin{aligned}
m_t &:= \inf\{B(s) : s \in [0, t]\},\\
M_t &:= \sup\{B(s) : s \in [0, t]\},\\
R_t &:= M_t - m_t.
\end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι $m_t \overset{d}{=} -M_t$ και $R_t \overset{d}{=} \sqrt{t}R_1$.

7. (25 Βαθμοί) (α) Έστω $h(x) = x^{-1}e^{-x^2/2}$ για κάθε $x > 0$ και $Z \sim N(0, 1)$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(Z > x)}{h(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(1/n)}{(1/n)^{1/2-\varepsilon}} = 0$$

με πιθανότητα 1.
(γ) Να δειχθεί ότι ισχύει

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}} \frac{B(t)}{\sqrt{t}} = \infty$$

με πιθανότητα 1.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!