Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 5 Σεπτεμβρίου 2017

Στα θέματα 3-6, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X, \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ είναι ανεξάρτητες, να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X)$.
Υπόδειξη: Θεωρείστε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}_1 := \sigma(\mathbf{E}(X|\mathcal{G}))$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές [σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$] με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0, 1)$. Θέτουμε $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$ και $T := \inf\{n \geq 2 : X_n > (X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1})/(n-1)\}$.
(α) Είναι ο T χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

3. (15 Βαθμοί) Για $s \in [0, 1]$ να υπολογιστεί η μέση τιμή $\mathbf{E}(B_s^2 e^{B_1})$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω $c \in \mathbb{R}$ δεδομένο. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ με

$$X_t := e^{cB_t - \frac{c^2}{2}t}$$

για κάθε $t \geq 0$ είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η B, δηλαδη την $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ με $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s, s \in [0, t]\})$ για κάθε $t \geq 0$.

5. (15 Βαθμοί) Έστω $c > 0$. Να δειχθεί ότι

$$\int_0^\infty e^{-t}\mathbf{1}_{B_t>0}\, dt \overset{d}{=} c \int_0^\infty e^{-ct}\mathbf{1}_{B_t>0}\, dt.$$

6. (20 Βαθμοί) Έστω $T := \inf\{t > 0 : B_t + t^{-1/2} = 0\}$. Θέτουμε

$$X_t := \frac{1}{t^{-1/2} + B_t}$$

για κάθε $t \in (0, T)$, και $X_0 = 0$.
(α) Να δειχθεί ότι η X ικανοποιεί στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t$$

για κατάλληλες συναρτήσεις a, σ.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

Μία $Z \sim N(0, 1)$ έχει ροπογεννήτρια $\mathbf{E}(e^{tZ}) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ροπές $\mathbf{E}(Z^{2k}) = \frac{(2k)!}{k!2^k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Σχόλια

2. (β) Τα σύνολα

$$\{X_n > 0.51 \text{ για άπειρα } n \in \mathbb{N}\}, \left\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{2}\right\}$$

έχουν πιθανότητα 1.

3. $\mathbf{E}(B_s^2 e^{B_s} e^{B_1 - B_s}) = \mathbf{E}(B_s^2 e^{B_s})\mathbf{E}(e^{B_1 - B_s}) = \ldots = e^{1/2} s(s+1)$.
Είναι λάθος ο υπολογισμός $\mathbf{E}(B_s^2 e^{B_1}) = \mathbf{E}((\sqrt{s} B_1)^2 e^{B_1}) = \ldots$

6. Με χρήση κάποιας μορφής του τύπου του Ito βρίσκουμε ότι

$$dX_t = \left(X_t^3 + \frac{t^{-3/2}}{2} X_t^2\right) dt - X_t^2\, dB_t.$$

Άρα $a(t,x) = x^3 + t^{-3/2} x^2/2$ και $\sigma(t,x) = -x^2$.