Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 1 Απριλίου 2017

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα, και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$.
(α) Αν η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{G}$, να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X)$.
(β) Αν $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, τότε $0 \leq \mathbf{E}(X\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(X^2)$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ διήθηση σε αυτόν. Πότε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 0}$ λέγεται martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και το μέτρο $\mathbf{P}$;

3. (15 Βαθμοί) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = \alpha) = \mathbf{P}(X_1 = \beta) = 1/2$. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$ και $S_0 := 0, S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Να βρεθεί σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $(S_n - cn)_{n\geq 0}$ να είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας.
(α) Πότε λέγεται μια οικογένεια σ-αλγεβρών, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, στον Ω διήθηση;
(β) Πότε λέγεται μια συνάρτηση $T : \Omega \to [0, \infty]$ χρόνος διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;
(γ) Αν οι S, T είναι χρόνοι διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ να δειχθεί ότι το ίδιο είναι και ο $S \wedge T$.

5. (15 Βαθμοί) Έστω $(X(t))_{t\geq 0}$ μια ανέλιξη με πραγματικές τιμές και ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Ποια είναι η διήθηση που παράγει η $(X(t))_{t\geq 0}$;

6. (25 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.
(α) Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $B_1^2 B_3 B_6$;
(β) Να εξεταστεί αν η ανέλιξη $(B_t^2)_{t\geq 0}$ είναι martingale, supermartingale ὴ submartingale ως προς τη διήθηση που παράγει η $(B_t)_{t\geq 0}$.
(γ) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(|B_1| \,|\, B_1^2)$;

Μία $Z \sim N(0, 1)$ έχει ροπές περιττής τάξης ίσες με μηδέν και $\mathbf{E}(Z^2) = 1, \mathbf{E}(Z^4) = 3$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες.

Καλή επιτυχία!