① 2016/12

Άσκηση:

Αν $f,g \in H^2_{[0,t]}$ $\left(f(t,\omega) : E\left(\int_0^t f^2\, dt\right) < \infty \right)$.

τότε $E\left(\int_0^t f\, dB_s \cdot \int_0^t g\, dB_s \right) =$

$= E\left(\int_0^t f(s,\omega)\cdot g(s,\omega)\, ds \right)$ (για $g=f$ είναι ισομετρία του Ito)

Αποδ.

Έστω $I(h) = \int_0^t h(s,\omega)\, dB_s$ για $h \in H^2_{[0,t]}$.

Θέλω $E\left(I(f)\cdot I(g) \right) = E\int_0^t f\cdot g\, ds$.

$L^2(P) \ni \langle I(f), I(g) \rangle = \langle f, g \rangle \in L^2(\lambda \times P)$

Η ισομετρία Ito για την $f+g$ δίνει.

$\| I(f+g) \|^2_{L^2(P)} = \| f+g \|$ (ας το πάρε χωρίς εσωτερικά γινόμενα)

$E\left(\int_0^t ((f+g)\, dB_s)^2 \right) = E\left(\int_0^t (f+g)^2\, ds \right) =$

$= E\left(\int_0^t (f\, dB_s)^2 \right)^{①} + E\left(\int_0^t (g\, dB_s)^2 \right)^{②} + 2E\left(\int_0^t f\, dB_s \cdot \int_0^t g\, dB_s \right) =$

$= E\left(\int_0^t f^2\, ds \right)^{①} + E\left(\int_0^t g^2\, ds \right)^{②} + 2E\left(\int_0^t fg\, ds \right)$

Άσκηση: Επίσ. Θερμότητας:

$u: \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$

φραγμένη, συνεχής, $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$

$u_t = \frac{1}{2} \Delta_x u$ στο $\mathbb{R}^d \times [0,\infty)$ (Laplace-ανά)

$u(x,0) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Τότε για $t > 0$ σταθερό δδο

(i) η $M_s = u(B_s, t-s)$, $s \in [0,t]$ είναι martingale

(ii) $u(t,x) = E_x f(B_t)$

$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}$

$u(x,0) = f(x)$

$u(x,t) = E_x f(B_t)$

κίνηση Brown που ξεκινάει από x.

$= E(f(x+B_t))$

-Λύση-

$\mathbb{R}^d$ $\mathbb{R}$

$u(B_s, Y_s)$

$Y_s = t-s$

(i) Από τον τύπο του Ito για $s \in [0,t)$.

$dM_s = \nabla u(B_s, t-s)\, dB_s + \cancel{u_t(B_s, t-s)(-ds)} + \cancel{\frac{1}{2}\Delta_x u(B_s, t-s)\, ds}$

από υπόθεση $u_t = \frac{1}{2}\Delta_x u$

άρα $dM_s = \nabla u(B_s, t-s) \cdot dB_s$.

άρα M_s είναι local martingale

κ' αφού είναι φραγμένη η M_s είναι martingale.

αφού είναι η u φραγμένη.

Είναι κίνηση Brown απ' όπου κι αν ξεκινάει.

(ii) $M_0 = u(B_0, t)$ → αρχική

$M_t = u(B_t, 0) = f(B_t)$ → τελική τιμή. (σταθερή μέση τιμή αφού είναι martingale ή αλλιώς θεώρημα στάσης)

$E_x(M_0) = E_x(M_t)$

$u(t,x) = E_x f(B_t)$

δεν έχει σημασία που το B_0 έχω το αρχικό μου σημείο.

20/6/12

(2)

Άσκηση: Να λυθούν:

(α) $dX_t = X_t\,dt + dB_t \qquad X_0 = x_0 > 0$

(β) $dX_t = -X_t\,dt + e^{-t}\,dB_t \qquad X_0 = x_0 > 0.$

• $e^{-t}X_t$:

$$d(e^{-t}X_t) = (de^{-t})X_t + e^{-t}\,dX_t + \underbrace{(de^{-t})(dX_t)}_{0}$$

$$= -e^{-t}\underbrace{X_t\,dt} + e^{-t}\underbrace{(X_t\,dt} + dB_t) =$$

$$= e^{-t}\,dB_t.$$

τα επιλέγω από μόνη μου ή μου τα δίνει.

$$\Rightarrow e^{-t}X_t - X_0 = \int_0^t e^{-s}\,dB_s.$$

$$X_t = e^{t}\left(x_0 + \int_0^t e^{-s}\,dB_s\right)$$

• $e^{t}X_t$:

$$d\,e^{t}X_t = e^{t}\cdot X_t\,dt + e^{t}\,dX_t + 0 =$$

$$= e^{t}\underbrace{X_t\,dt} + e^{t}(\underbrace{-X_t\,dt} + e^{-t}\,dB_t) =$$

$$= dB_t$$

$$e^{t}X_t - X_0 = B_t \Rightarrow$$

$$X_t = e^{-t}(x_0 + B_t)$$

Άσκηση: Θεωρώ τη Σ.Δ.Ε.

$$dX_t = f(t,X_t)\,dt + c(t)\,X_t\,dB_t \qquad X_0 = x_0 > 0.$$

ντετερμινιστικό — η τυχαιότητα είναι μόνο εδώ

$c(\cdot), f(\cdot)$ ντετερμινιστικές συναρτήσεις

Έστω $F_t = e^{-\int_0^t c(s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int c^2(s)\,ds}$

$Y_t = F_t \cdot X_t$

νδο $dY_t = F_t \cdot f(t,X_t)\,dt = F_t \cdot f\left(t, \frac{Y_t}{F_t}\right) dt$, $Y_0 = x_0$ } συνήθης ΔΕ για την Y_t.

Λύση:

Πρώτα βρίσκω το dF_t.

Θέτω $Z_t = \int_0^t c(s)\,dB_s$ $\quad W_t = \int_0^t c^2(s)\,dt$

$$g(x,y) = e^{-x+\frac{1}{2}y}$$

$$F_t = g(Z_t, W_t)$$

$$dF_t = -e^{-Z_t+\frac{1}{2}W_t}\,dZ_t + \frac{1}{2}e^{-Z_t+\frac{1}{2}W_t}\,dW_t + \frac{1}{2}e^{-Z_t+\frac{1}{2}W_t}(dZ_t)^2 =$$

επιβιώνει, [illegible]

$(dZ_t)^2$

$dZ_t\,dW_t$

$(dW_t)^2$

$$= F_t\left(-c(t)\,dB_t + \frac{1}{2}c^2(t)\,dt + \frac{1}{2}c^2(t)\,dt\right)$$

$$= F_t\left(-c(t)\,dB_t + c^2(t)\,dt\right).$$

Άρα $dY_t = d(F_t X_t) = dF_t \cdot X_t + F_t \cdot dX_t + dF_t \cdot dX_t =$

$= F_t(-c(t)\,dB_t + c^2(t)\,dt)\,X_t + F_t(f(t,X_t)\,dt + c(t)\,X_t\,dB_t) +$

$+ F_t \cdot (-c(t)) \cdot c(t) \cdot X_t \cdot dt =$

$= F_t(f(t,X_t))dt$

$Y_0 = F_0 \cdot X_0 = X_0 = x_0.$

<u>Άσκηση</u> Να λυθεί η ΣΔΕ. ↗ Μια ουσία που χρειάζεται

$$dX_t = \frac{1}{X_t}dt + a X_t dB_t. \qquad X_0 = x_0 > 0$$

$c(t) = \alpha$, άρα $F_t = e^{-\alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2}t}$ $\left(e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}y}\right)$

$$dF_t = -a\, e^{-\alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2}t} dB_t + \frac{\alpha^2}{2}F_t\, dt + \frac{1}{2}\alpha^2 F_t (dB_t)^2 =$$

$$= F_t\left(-\alpha\, dB_t + \frac{\alpha^2}{2}d_t + \frac{\alpha^2}{2}d_t\right) =$$

$$= -\alpha F_t dB_t + F_t\alpha^2\, dt.$$

$$dY_t = d(F_t \cdot X_t) = dF_t \cdot X_t + F_t \cdot dX_t + dF_t \cdot dX_t =$$

$$= \left(\underbrace{-\alpha F_t dB_t} + \underline{F_t\alpha^2 dt}\right) X_t + F_t\left(\frac{1}{X_t}dt + \alpha \underbrace{X_t dB_t}\right) +$$

$$\underline{- \alpha F_t \cdot \alpha X_t\, dt} =$$

$$= F_t \cdot \frac{1}{X_t}dt = F_t^2 \cdot \frac{1}{Y_t}dt.$$

$$\Rightarrow dY_t = \frac{1}{Y_t}F_t^2 dt, \quad h(t) = Y_t \quad (\omega \in \Omega \text{ σταθερό})$$

$$h'(t) = \frac{1}{h(t)} \cdot F_t^2 \Rightarrow (h^2(t))' = 2 \cdot F_t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2(t) - h^2(0) = 2\int_0^t F_s^2\, ds.$$

$$\Rightarrow \underset{F_t^2 \cdot X_t^2}{\underset{\parallel}{Y^2(t)}} - x_0^2 = 2\int_0^t e^{-2\alpha B_s + \alpha^2 s}\, ds$$

$$\Rightarrow X_t^2 F_t^2 = x_0^2 + 2\int_0^t \sim ds$$

$$\Rightarrow X_t^2 = F_t^{-2}\left(x_0^2 + 2\int_0^t \dots\, ds\right)$$

$$\Rightarrow X_t = F_t^{-1}\left(x_0^2 + 2\int_0^t (\quad)\, ds\right)^{1/2}$$ αφού $X_0 = x_0 > 0$

Άσκηση: Να υπολογιστεί.

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^1 B_s^2\, dB_s,\ \int_0^2 s\, dB_s\right) =$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\int_0^1 B_s^2\, dB_s,\ \int_0^1 s\, dB_s\right) + \mathrm{Cov}\left(\int_0^1 B_s^2\, dB_s,\ \int_1^2 s\, dB_s\right) =$$

Στοχ. ολ. στον H^2

$$= E\left(\int_0^1 B_s^2\, dB_s \cdot \int_0^1 s\, dB_s\right) - E\left(\int_0^1 B_s^2\, dB_s\right) \cancel{E\left(\int_0^1 s\, dB_s\right)} +$$

$$+ \mathrm{Cov}\left(\int_0^1 B_s^2\, dB_s,\ \int_1^2 s\, dB_s\right) =$$

είναι ντετερμινιστικό

$$= E\left(\int_0^1 s \cdot B_s^2\, ds\right) - 0 \cdot 0 + \mathrm{Cov}\left(\underbrace{\int_0^1 B_s^2\, dB_s}_{f_1},\ \underbrace{\int_1^2 s\, dB_s}_{}\right) =$$

0

ανεξάρτητο από την f_1

από Fubini

$$= \int_0^1 E(s \cdot B_s^2)\, ds$$

$m, n \in \mathbb{N}$.

$$* \int_0^1 E(s^m \cdot B_s^n)\, ds =$$

$B_s = \sqrt{s}\, B_1$

$$= \int_0^1 s^m E(B_s^n)\, ds =$$

$$= \int_0^1 s^m E(s^{\frac{n}{2}} B_1^n)\, ds =$$

$$= E(B_1^n) \cdot \int_0^1 s^{m+\frac{n}{2}}\, ds =$$

$$= E(B_1^n) \cdot \frac{1}{n+\frac{n}{2}+1}$$

$$= E(B_1^n) = \begin{cases} 0, & 2 \nmid n \\ 1 \cdot 3 \cdots (2k-1), & n = 2k \end{cases}$$