Στοχαστικός Λογισμός

Τελική εξέταση 29 Ιουνίου 2021

1. (25 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα, και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Θέτουμε $Y := \mathbf{E}\big(\{X - \mathbf{E}(X|\mathcal{G})\}^2|\mathcal{G}\big)$.

(α) Να δειχθεί ότι η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ ισούται με $\mathbf{E}[\{\mathbf{E}(X|\mathcal{G})\}^2] - \{\mathbf{E}(X)\}^2$.

(β) Να δειχθεί ότι

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbf{E}(Y) + \operatorname{Var}(\mathbf{E}(X|\mathcal{G})).$$

2. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανέλιξη σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ στον οποίο έχουμε και μια διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [$X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$]

(α) Πότε η ανέλιξη $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται supermartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(β) Αν η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι supermartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και η ακολουθία $(\mathbf{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι σταθερή, να δειχθεί ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. (25 Βαθμοί) Θέτουμε $X := \int_0^\infty B_s\, e^{-s}\, ds$.

(α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$.

(β) Να υπολογιστούν οι $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2)$.

(γ) Να δειχθεί ότι $X \sim N(0, \sigma^2)$ για κάποιο $\sigma \in (0, \infty)$ το οποίο και να προσδιοριστεί.
[Κάντε το (β) ή το (γ).]

4. (25 Βαθμοί) Καθένα από τα παρακάτω στοχαστικά ολοκληρώματα να εκφραστεί με τη βοήθεια των τιμών t, B_t και ενός ολοκληρώματος Riemann της μορφής $\int_0^t h(s, B_s)\, ds$ για κατάλληλη συνεχή συνάρτηση h.

(α) $\int_0^t \cos(s)\, dB_s$.

(β) $\int_0^t s e^{B_s}\, dB_s$.

5. (20 Βαθμοί) Βρείτε μια λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} dX_t &= 6X_t^{1/2}\, dt + 4X_t^{3/4}\, dB_t \\ X_0 &= 1 \end{aligned}$$

που να ορίζεται τουλάχιστον για κάθε t σε ένα διάστημα της μορφής $[0, t_0(\omega))$ όπου $t_0(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Ορίστε το $t_0(\omega)$.

[Υπόδειξη: Δοκιμάστε λύση της μορφής $X_t := f(B_t)$ για κατάλληλη συνάρτηση $f \in C^2(\mathbb{R})$ την οποία και να προσδιορίσετε.]

Στις ασκήσεις 3, 4, 5, η B είναι μια μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Υπενθυμίσεις. 1. Για κάθε $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Borel-μετρήσιμη συνάρτηση με $a := \left(\int_0^\infty h^2(s)\,ds\right)^{1/2} \in (0,\infty)$, η τυχαία μεταβλητή

$$\int_0^\infty h(s)\,dB_s$$

είναι καλά ορισμένη, παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, και έχει κατανομή $N(0,a^2)$.

2. $\mathbf{E}(B_sB_t) = s \wedge t$ για κάθε $s,t \in [0,\infty)$.

3. $\int_0^t xe^{-x}\,dx = 1-(1+t)e^{-t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απαντήσεις

3. (α) Αρκεί $Y := \int_0^\infty |B_s e^{-s}|\, ds < \infty$ με πιθανότητα 1.
1ος τρόπος. Δείχνουμε $\mathbf{E}(Y) < \infty$...

2ος τρόπος. Έστω $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : \lim_{t\to\infty} B_t/t = 0\}$. Ισχύει $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$. Για κάθε $\omega \in \Omega_0$ υπάρχει $t_0(\omega)$ ώστε $|B_t| < t$ για κάθε $t > t_0(\omega)$. Έπειτα

$$\int_{t_0(\omega)}^\infty |B_s e^{-s}|\, ds < \int_{t_0(\omega)}^\infty s e^{-s}\, ds < \infty.$$

Άρα ...
(β) $\mathbf{E}(X) = 0, \mathbf{E}(X^2) = 1/2$.

(γ) Από τον κανόνα διαφόρισης γινομένου έχουμε

$$B_t e^{-t} = \int_0^t e^{-s}\, dB_s - \int_0^t e^{-s} B_s\, ds$$

για κάθε $t > 0$. Για $t \to \infty$, το αριστερό μέλος τείνει στο 0 (με πιθανότητα 1). Άρα, με πιθανότητα 1, έχουμε

$$X = \int_0^\infty e^{-s}\, dB_s$$

και το συμπέρασμα έπεται από την υπενθύμιση 1.

5. Μια λύση όπως ζητιέται είναι η

$$X_t := (B_t + 1)^4$$

για $0 \leqslant t \leqslant t_0(\omega)$, όπου $t_0(\omega) := \inf\{s \geqslant 0 : B_s = -1\}$. Με πιθανότητα 1 έχουμε $t_0(\omega) \in (0, \infty)$ γιατί ...

Επίσης, αν θέσουμε $f(x) = (x+1)^4 \mathbf{1}_{x \geqslant -1}$, τότε η $f \in C^2(\mathbb{R})$ και η $X_t := f(B_t)$ είναι λύση για $t \in [0, \infty)$.