Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 30 Ιουνίου 2020

Στις ασκήσεις 2-5, B είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown. Δίνεται ότι $\mathbf{E}(B_1^4) = 3$.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}(X_i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$. Θέτουμε $X_0 = 1$ και

$$S_0 := 0,$$

$$S_n := X_0X_1 + X_1X_2 + \cdots + X_{n-1}X_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^+.$$

Επίσης, θεωρούμε τη διήθηση $\mathcal{F}_n := \sigma(\{X_0, X_1, \ldots, X_n\}), n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (30 Βαθμοί) (α) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ με $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\})$ για κάθε $t \geqslant 0$.

(β) Για $0 \leqslant r < s < t < u$ να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(B_rB_sB_t) = 0$ και $\mathbf{E}(B_rB_sB_tB_u) = r(2s + t)$.

3. (25 Βαθμοί) Ποια η μέση τιμή και διασπορά των τυχαίων μεταβλητών

(α) $X := \int_0^3 B_s\,ds$

(β) $Y := \int_0^3 B_s\,dB_s$

4. (20 Βαθμοί) Να υπολογιστούν τα διαφορικά

(α) $d(e^{B_t})$,

(β) $d(e^{tB_t})$.

5. (25 Βαθμοί) Στο διάστημα $[0, 1]$, θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -\frac{X_t}{2(1-t)}\,dt + (1-t)^{1/4}\,dB_t, \qquad \text{για } t \in (0, 1),$$

$$X_0 = 1.$$

(α) Να βρεθεί μια λύση της εξίσωσης. [Υπόδειξη: Υπολογίστε το $d((1-t)^a X_t)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.]

(β) Είναι μοναδική;

(γ) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t\to 1^-} X_t$ για τη λύση που βρήκατε στο ερώτημα (α).

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

4. (α) Η κατάλληλη επιλογή είναι $a = -1/2$. Λύση

$$X_t = \sqrt{1-t}\left(1 + \int_0^t (1-s)^{-1/4}\, dB_s\right).$$

(β) Η λύση είναι μοναδική.

(γ) Το όριο είναι 0.