Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 14 Σεπτεμβρίου 2018

Στα θέματα 3-7 πιο κάτω, η $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια διήθηση σε αυτόν.
(α) Πότε λέγεται μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 0}$ στον Ω με τιμές στο $\mathbb{R}$ submartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$;
(β) Αν οι $(X_n)_{n\geq 0}, (Y_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ να δειχθεί ότι και η $(X_n \vee Y_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $X_1 \sim N(0,1)$. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},\\
&\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \qquad \text{για κάθε } n \geq 1,\\
&S_0 := 0,\\
&S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για κάθε } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι οι ανελίξεις $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}, (S_n^3 - 3nS_n)_{n\geq 0}$ είναι martingales ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3. (15 Βαθμοί) Για κάθε $t \in (0,\infty)$ θέτουμε $X_t := \int_0^t \mathbf{1}_{B_s>0}\, ds = \lambda(\{s \in [0,t] : B_s > 0\})$.
(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $a > 0$ ώστε να ισχύει $X_t \stackrel{d}{=} t^a X_1$ για κάθε $t > 0$.
(β) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

4. (15 Βαθμοί) Ποια η μέση τιμή και ποια η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X = \int_0^t s e^{B_s/\sqrt{2}}\, dB_s$.

5. (15 Βαθμοί) Για $a > 0$, έστω $T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ και έπειτα να υπολογιστεί η $E(T)$.

6. (15 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbf{E}\{\log(1 + B_t^2)\} = \int_0^t \mathbf{E}\left(\frac{1 - B_s^2}{(1 + B_s^2)^2}\right) ds.$$

7. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}
dX_t &= i\sqrt{2t} X_t dB_t - t^2 X_t dt,\\
X_0 &= 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

(α) Να βρεθεί μια λύση της (1). [Υποδ.: Υπολογίστε το $d(\log X_t)$.]
(β) Για τη λύση που βρέθηκε στο (α), να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες.

Καλή επιτυχία!