Στοχαστικός Λογισμός

Ενδιάμεση εξέταση

21 Νοεμβρίου 2015

Θέμα 1. (20 Βαθμοί) Έστω μια διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

(α) Πότε λέμε μια ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίων μεταβλητών προβλέψιμη ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$;

(β) Έστω ότι η $(X_n)_{n\geq 1}$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ είναι martingale και προβλέψιμη. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X_n = c$ για κάθε $n \geq 1) = 1$.

Θέμα 2. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ martingale ως προς μία διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ και έστω ότι $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι για κάθε $1 \leq k < \ell \leq m < n$ φυσικούς αριθμούς ισχύει

$$\mathbf{E}\{(X_n - X_m)(X_\ell - X_k)\} = 0.$$

Θέμα 3. (20 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown.

(α) Να δειχθεί ότι $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$ για κάθε $s, t \geq 0$.

(β) Ποιά είναι η κατανομή της $B_1 - 5B_2$;

Θέμα 4. (25 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown και $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\})$ για κάθε $t \geq 0$ η διήθηση που παράγει. Να δειχθεί ότι:

(α) Για κάθε $0 \leq s < t$ ισχύει

$$\mathbf{E}\left(\int_s^t B_r\, dr \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) = (t - s)B_s.$$

(β) Η ανέλιξη $X_t := tB_t - \int_0^t B_r\, dr, t \geq 0$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Θέμα 5. (20 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown και

$$\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = 1\}, n \geq 1$$

ακολουθία διαμερίσεων του $[0, 1]$ με $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Θέτουμε

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} (B_{t_k^{(n)}} - B_{t_{k-1}^{(n)}})^3$$

για κάθε $n \geq 1$. Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(T_n)$ και να δειχθεί ότι $T_n \to 0$ στον L^1 καθώς $n \to \infty$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

1. (β) $\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = X_n$, επειδή η X είναι martingale. Το αριστερό μέλος ισούται με X_{n+1} γιατί η X είναι προβλέψιμη. Άρα $X_{n+1} = X_n$ με πιθανότητα 1. Έπειτα η X_1 είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη, και αφού $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, κατά τα γνωστά η X_1 πρέπει να είναι σταθερή.

2. Η δεδομένη μέση τιμή ισούται με

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{(X_n - X_m)(X_\ell - X_k)\,|\,\mathcal{F}_m\}\} = \mathbf{E}\{(X_\ell - X_k)\mathbf{E}\{(X_n - X_m)\,|\,\mathcal{F}_m\}\} = 0.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί η $X_\ell - X_k$ είναι $\mathcal{F}_m$-μετρήσιμη. Η δεύτερη έπεται από γνωστή πρόταση για martingales.

3. (α) Θεωρία.
(β) $B_1 - 5B_2 = B_1 - 5(B_1 + B_2 - B_1) = -4B_1 - 5(B_1 - B_1)$. Αυτή η τ.μ., ως γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων κανονικών τ.μ., ακολουθεί την κανονική κατανομη, και πιο συγκεκριμένα την $N(0, 41)$.

4. Το ολοκλήρωμα μέσα στη μέση τιμή γράφεται

$$\int_s^t (B_r - B_s + B_s)\,dr = \int_s^t (B_r - B_s)\,dr + (t-s)B_s$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι τ.μ. ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$ γιατί η ανέλιξη $(B_r - B_s)_{r\ge s}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$ ενώ η B_s είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη. Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\int_s^t B_r\,dr\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right) &= \mathbf{E}\left(\int_s^t (B_r - B_s)\,dr\right) + (t-s)B_s\\ &= \int_s^t \mathbf{E}(B_r - B_s)\,dr + (t-s)B_s = (t-s)B_s\end{aligned}$$

5. Για $0 \le s < t$ ισχύει

$$A_{s,t} := \frac{B_t - B_s}{\sqrt{t-s}} \sim N(0,1),$$

και επειδή η $A_{s,t}$ έχει συμμετρική κατανομή και πεπερασμένες ροπές, έχουμε $\mathbf{E}(A_{s,t}) = 0$. Άρα $\mathbf{E}(T_n) = 0$.
Έπειτα, αν $Z \sim N(0,1)$, έχουμε

$$\mathbf{E}|T_n| \le \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\{|B_{t_k^{(n)}} - B_{t_{k-1}^{(n)}}|^3\} = \sum_{k=1}^n (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})^{3/2}\mathbf{E}|Z|^3 \le \mathbf{E}|Z|^3\|\Delta\|_n^{1/2}\sum_{k=1}^n (t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) = \mathbf{E}|Z|^3\|\Delta\|_n^{1/2}$$