Στοχαστικός Λογισμός 2020

Ασκήσεις I

1. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές (σε κοινό χώρο πιθανότητας) ώστε $\mathbf{P}(X < Y) > 0$ και $\mathbf{E}|X|, \mathbf{E}|Y| < \infty$. Θεωρούμε τη σχέση

$$\mathbf{E}(X \mid X < Y) \leqslant \mathbf{E}(X). \tag{1}$$

(α) Να δειχθεί ότι η (1) ισχύει αν υποθέσουμε ένα από τα εξής:

(i) Η Y είναι σταθερή τυχαία μεταβλητή.

(ii) Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

(iii) Ισχύει $(X, Y) \stackrel{d}{=} (Y, X)$ και $\mathbf{P}(X = Y) = 0$.

(β) Να δειχθεί ότι η υπόθεση $\mathrm{Cov}(X, Y) \leqslant 0$ δεν συνεπάγεται την (1).
[Υποθέτουμε εδώ επιπλέον ότι $\mathbf{E}|XY| < \infty$.]

2. Έστω $X \in L^1(\mathbf{P})$ και $t \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $Y := \max\{X, t\}$.

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X \mid Y)(\omega) = Y \mathbf{1}_{Y(\omega) > t} + \mathbf{E}(X \mid X \leqslant t) \mathbf{1}_{Y(\omega) = t}.$$

(β) Εξηγήστε γιατί αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο.

(γ) Μαντέψτε την αντίστοιχη έκφραση για την $\mathbf{E}(X \mid Z)$ όπου $Z := \min\{X, t\}$.

3. Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Έστω ότι η R είναι ανεξάρτητη από τις X, Y και $\mathbf{P}(R = 1) = p, \mathbf{P}(R = 0) = 1 - p$, όπου $p \in (0, 1)$ είναι δεδομένη παράμετρος. Έστω $Z = (Z_1, Z_2)$ με

$$Z_1 := RX + (1 - R)Y,$$
$$Z_2 := RY + (1 - R)X.$$

Δηλαδή η Z ισούται με (X, Y) ή με (Y, X).

(α) Να δειχθεί ότι οι Z, R είναι ανεξάρτητες.

(β) Για $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη φραγμένη, να βρεθεί η $\mathbf{E}(g(X, Y) \mid Z)(\omega)$ ως συνάρτηση των $Z_1(\omega), Z_2(\omega)$ και της συνάρτησης g.

4. Έστω $(X_n)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{E}(X_i \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X_1 \mid \mathcal{G})$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. [Ισότητα με πιθανότητα 1, όχι απλώς ισονομία.]

(β)

$$\mathbf{E}(X_1 \mid \mathcal{G}) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

5. Θεωρούμε μια κάλπη με α άσπρες και μ μαύρες σφαίρες με $K : \alpha + \mu > 0$. Εξάγουμε από την κάλπη στην τύχη μια σφαίρα και δεν την επιστρέφουμε στην κάλπη. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να αδειάσει η κάλπη. Έστω A_n, B_n το πλήθος των άσπρων και των μαύρων σφαιρών αντίστοιχα μετά την n-οστή εξαγωγή. Θέτουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(\{A_i : 0 \leqslant i \leqslant n\})$ και

$$X_n := \frac{A_n}{A_n + B_n}$$

για $n = 0, 1, \ldots, K - 1$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(X_n)_{0 \leqslant n \leqslant K-1}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{0 \leqslant n \leqslant K-1}$.

6. Έστω $(X_n)_{n\geqslant 0}$ το martingale του παραδείγματος 3.5 των σημειώσεων (Κάλπη Pólya). Υποθέτουμε ότι $\alpha, \mu > 0$. Έστω $\gamma \in (0, X_0)$ και

$$T := \inf\{n \geqslant 0 : X_n \leqslant \gamma\}.$$

(α) Για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}^+$, να δειχθεί, με εφαρμογή του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής στον χρόνο $T \wedge n$, ότι

$$\mathbf{P}(T \leqslant n) \leqslant \frac{A_n - X_0}{A_n - \gamma}$$

όπου $A_n = \mathbf{E}(X_n \,|\, T > n)$.

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$\mathbf{P}(T \leqslant n) \leqslant \frac{1 - X_0}{1 - \gamma}$$

και $\mathbf{P}(T = \infty) > 0$.

Σημείωση: Για $A \subset \Omega$ μετρήσιμο με $\mathbf{P}(A) > 0$, ορίζουμε

$$\mathbf{E}(X \,|\, A) := \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_A X \, d\mathbf{P}.$$