Στοχαστικός Λογισμός
Ασκήσεις 1

1. Έστω $X \in L^1(\mathbf{P})$ και $t \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $Y := \max\{X, t\}$.

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X \,|\, Y)(\omega) = Y\mathbf{1}_{Y(\omega)>t} + \mathbf{E}(X \,|\, X \le t)\mathbf{1}_{Y(\omega)=t}.$$

(β) Εξηγήστε γιατί αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο.

(γ) Μαντέψτε την αντίστοιχη έκφραση για την $\mathbf{E}(X \,|\, Z)$ όπου $Z := \min\{X, t\}$.

Σημείωση: Για $A \subset \Omega$ μετρήσιμο με $\mathbf{P}(A) > 0$, ορίζουμε $\mathbf{E}(X \,|\, A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \int_A X \, d\mathbf{P}$.

2. Άσκηση 3.12 από τις σημειώσεις.

3. Άσκηση 3.13 από τις σημειώσεις.

4. Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Έστω ότι η R είναι ανεξάρτητη από τις X, Y και $\mathbf{P}(R = 1) = p, \mathbf{P}(R = 0) = 1 - p$, όπου $p \in (0, 1)$ είναι δεδομένη παράμετρος. Έστω $Z = (Z_1, Z_2)$ με

$$Z_1 := RX + (1 - R)Y,$$
$$Z_2 := RY + (1 - R)X.$$

Δηλαδή η Z ισούται με (X, Y) ή με (Y, X).

(α) Να δειχθεί ότι οι Z, R είναι ανεξάρτητες.

(β) Για $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη φραγμένη, να βρεθεί η $\mathbf{E}(g(X, Y) \,|\, Z)$ ως συνάρτηση των Z_1, Z_2.

5. Έστω $(X_n)_{1 \le k \le n}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{E}(X_i \,|\, \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X_1 \,|\, \mathcal{G})$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. [Ισότητα, όχι απλώς ισονομία.]

(β)

$$\mathbf{E}(X_1 \,|\, \mathcal{G}) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$