Στοχαστικός Λογισμός
2ο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Έστω $n \geq 1$, χρόνοι $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή

$$a_1 B(t_1) + \cdots + a_n B(t_n)$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή. Ποιά είναι η μέση τιμή και διασπορά της;

2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y = \int_0^t B^2(s)\, ds$.

3. Έστω $a > 0$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη X με $X(t) := B(a-t) - B(a)$ για κάθε $t \in [0, a]$ είναι κίνηση Brown στο $[0, a]$.

4. Έστω B τυπική κίνηση Brown, $\mu > 0$, και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την $X_t := x + B_t + \mu t$ για κάθε $t \geq 0$, δηλ. την κίνηση Brown με ταχύτητα μ που ξεκινάει απο το x. Για $r \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $T_r := \inf\{s \geq 0 : X_s = r\}$ και $\phi(r) := e^{-2\mu r}$. Να δειχθεί ότι η $M_t := \phi(X_t), (t \geq 0)$ είναι martingale.

5. Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\int_0^t s\, dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\, ds.$$

6. Έστω ανέλιξη X όπως στο Θεώρημα 11.2. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(Y_t)_{t \geq 0}$ με

$$Y_t := \left(\int_0^t X(s, \omega)\, dB_s \right)^2 - \int_0^t X(s, \omega)^2\, ds$$

για κάθε $t \geq 0$ είναι μία συνεχής martingale.