

Υποδείγματα Παραγωγής II

Τελική Εξέταση – Ιούλιος 2016

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Ένα μηχάνημα υπόκειται σε βλάβες και επισκευές κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του. Συγκεκριμένα το μηχάνημα μπορεί να λειτουργεί είτε σε κανονική κατάσταση είτε σε κατάσταση μικρής βλάβης. Όταν βρίσκεται σε κατάσταση κανονικής λειτουργίας παθαίνει μικρή βλάβη με (εκθετικό) ρυθμό f_1 και καταστροφική βλάβη με ρυθμό f_2 . Στην κατάσταση μικρής βλάβης συνεχίζει να λειτουργεί και παθαίνει καταστροφική βλάβη με ρυθμό g . Όταν το μηχάνημα πάθει καταστροφική βλάβη αρχίζει διαδικασία επισκευής η οποία διαρκεί χρόνο που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό r . Μετά το πέρας της επισκευής το μηχάνημα βρίσκεται σε κατάσταση κανονικής λειτουργίας.

(α) Να μοντελοποιηθεί το σύστημα ως Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου και να σχηματιστεί το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

(β) Να βρεθεί το ποσοστό χρόνου που το μηχάνημα βρίσκεται σε κανονική κατάσταση, κατάσταση μικρής βλάβης ή κατάσταση επισκευής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Ένα εργαστήριο κατασκευάζει εξαρτήματα κατά παραγγελία. Οι παραγγελίες φτάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Στο σύστημα υπάρχει ουρά αναμονής με απεριόριστη χωρητικότητα. Για την εξυπηρέτηση των παραγγελιών υπάρχουν δύο επιλογές: Η πρώτη είναι να αγοραστούν δύο μηχανές που εργάζονται παράλληλα με χρόνο εξυπηρέτησης στην καθεμιά που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό μ . Η δεύτερη επιλογή είναι να αγοραστεί μια μηχανή με διπλάσια ταχύτητα, έτσι ώστε ο χρόνος εξυπηρέτησης να ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό 2μ .

(α) Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα και ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο χώρο αναμονής σε στάσιμη κατανομή για κάθε μια από τις δύο επιλογές.

(β) Να συγκριθούν τα δύο συστήματα ως προς τα δύο παραπάνω κριτήρια για τιμές $\lambda = 8, \mu = 6$.

(γ (Προαιρετικό, επιπλέον 5%)) Να επαναληφθεί το (β) για γενικές τιμές των λ και μ .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Στο τμήμα επειγόντων περιστατικών ενός περιφερειακού κέντρου υγείας τα περιστατικά που φτάνουν έχουν ταξινομηθεί σε τρεις κατηγορίες : συνήθη, σοβαρά και επείγοντα. Οι αφίξεις κάθε τύπου είναι Poisson με αντίστοιχους ρυθμούς 4 ανά ώρα, 3 ανά ημέρα και 1 ανά ημέρα (θεωρήστε ότι το κέντρο λειτουργεί σε 24ωρη βάση). Οι χρόνοι αντιμετώπισης ενός περιστατικού ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 20 λεπτά. Η εξυπηρέτηση ακολουθεί το σύστημα nonpreemptive priority με τα επείγοντα να έχουν την υψηλότερη προτεραιότητα και τα συνήθη τη χαμηλότερη.

(α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός γιατρών που απαιτούνται ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές;

(β) Για την απάντηση στο (α), να βρεθούν οι αναμενόμενοι χρόνοι παραμονής στο σύστημα για κάθε κατηγορία περιστατικού.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Ένα δίκτυο εξυπηρέτησης αποτελείται από δύο σταθμούς συνδεδεμένους σε σειρά. Οι πελάτες φτάνουν στο σταθμό 1 σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 14 ανά ώρα. Από τους πελάτες που ολοκληρώνουν την εξυπηρέτηση στο σταθμό 1 ένα ποσοστό 50% αναχωρεί από το σύστημα ενώ το υπόλοιπο 50% προχωρεί για επιπλέον εξυπηρέτηση στο σταθμό 2. Μετά την εξυπηρέτηση στο σταθμό 2 το 75% των πελατών αναχωρεί από το σύστημα, ενώ το 25% επιστρέφει πίσω στο σταθμό 1.

Σε κάθε σταθμό υπάρχει ένας μόνο υπηρέτης. Στο σταθμό 1 η εξυπηρέτηση γίνεται με ρυθμό 20 ανά ώρα και στο σταθμό 2 με ρυθμό 12 ανά ώρα.

(α) Να δείξετε ότι το σύστημα είναι ευσταθές και να υπολογίσετε τον αναμενόμενο συνολικό αριθμό πελατών και στους δύο σταθμούς σε κατάσταση ισορροπίας.

(β) Υπάρχει δυνατότητα να αλλάξει ο τρόπος εξυπηρέτησης στο σταθμό 2 έτσι ώστε όλοι οι πελάτες που τελειώνουν την εξυπηρέτησή τους εκεί να αναχωρούν από το σύστημα αμέσως χωρίς να απαιτείται επιστροφή στο σταθμό 1. Σε αυτή την περίπτωση ο ρυθμός εξυπηρέτησης θα είναι οπωσδήποτε μικρότερος από 12, επειδή η εξυπηρέτηση θα πρέπει να γίνεται με μεγαλύτερη προσοχή και ακρίβεια. Να βρεθεί ο ελάχιστος δυνατός ρυθμός εξυπηρέτησης στο σταθμό 2 κάτω από αυτό το σύστημα, έτσι ώστε ο συνολικός αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα να είναι μικρότερος από ότι προηγουμένως.

Ουρές Αναμονής Τυπολόγιο

1 Απλές Ουρές

Συμβολισμός: L = αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα, L_q = αναμενόμενος αριθμός πελατών στο χώρο αναμονής, W = αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο σύστημα, W_q = αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο χώρο αναμονής, στην οριακή κατανομή.

1.1 Ουρά $M/M/1$

λ =Ρυθμός αφίξεων, μ =Ρυθμός εξυπηρέτησης, $\rho = \lambda/\mu$.

Οριακή Κατανομή: $p_n = (1 - \rho)\rho^n, n = 0, 1, 2, \dots$ $L = \frac{\rho}{1-\rho}, L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}, W = \frac{1}{\mu-\lambda}, W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

1.2 Ουρά $M/M/1/K$

$$p_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots, L = \begin{cases} \frac{\rho[1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}, & \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2}, & \rho = 1 \end{cases}.$$

1.3 Ουρά $M/M/s$

λ =Ρυθμός αφίξεων, μ =Ρυθμός εξυπηρέτησης σε κάθε υπηρέτη, $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$.

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}, p_n = \begin{cases} p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}, & n = 0, 1, \dots, s \\ p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!s^{n-s}}, & n \geq s+1 \end{cases} L_q = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}$$

1.4 Ουρά $M/G/1$

λ =Ρυθμός αφίξεων, $1/\mu$ =Μέση τιμή χρ. εξυπηρέτησης, σ^2 =Διασπορά χρ. εξυπηρέτησης, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}.$$

2 Μαρκοβιανές Ουρές με Προτεραιότητες

s =αριθμός υπηρέτων, N =αριθμός κλάσεων, λ_k =ρυθμός άφιξης πελατών κλάσης $k, k = 1, 2, \dots, N, \lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_N, \mu$ =κοινός ρυθμός εξυπηρέτησης για όλες τις κλάσεις, $r = \lambda/\mu$.

2.1 NonPreemptive Priorities

$$W_k = \frac{1}{AB_{k-1}B_k} + \frac{1}{\mu}, k = 1, 2, \dots, N,$$

όπου

$$A = s! \frac{s\mu - \lambda}{r^s} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{r^j}{j!} + s\mu, B_0 = 1, B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{s\mu}.$$

2.2 Preemptive Priorities ($s = 1$)

$$W_k = \frac{1}{B_{k-1}B_k}, k = 1, 2, \dots, N,$$