ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟΝ «ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ»

(Μέρος Β)

Προσοχή: Οι απαντήσεις οφείλουν να είναι πλήρως αιτιολογημένες σύμφωνα με τη θεωρία, με σαφή επίκληση και απόδειξη των υποθέσεων κάθε θεωρήματος του οποίου γίνεται χρήση. Η «στεγνή» εύρεση σημείων ΚΚΤ, εκτός από το ότι μπορεί να μην οδηγεί στη λύση, δεν συνιστά απάντηση στα ερωτήματα.

* * *

ΘΕΜΑ Θ (9/2009): Ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει το κεφάλαιό του (το οποίο θεωρούμε ότι είναι ίσο με 1) σε n δραστηριότητες. Εάν επενδύσει κεφάλαιο x σε οποιαδήποτε δραστηριότητα, η απόδοσή του είναι $u(x)$, όπου η συνάρτηση u είναι αύξουσα, διαφορίσιμη και γνησίως κοίλη πάνω στο $[0,+\infty)$ (εάν χρειαστεί, μπορεί να υποτεθεί επίσης ότι $u(0)=0$). Ζητείται να διατυπωθεί και να λυθεί το πρόβλημα κατανομής του κεφαλαίου του στις n δραστηριότητες με στόχο τη μεγιστοποίηση της συνολικής απόδοσής του.

ΘΕΜΑ Ι (9/2009): Έστω $c=(1,2,\dots,n)$ και έστω $S\coloneqq\{x\in\mathbb{R}^n : c^T x = 1, x\geq 0\}$. Ας ονομάσουμε $x^{-1}\coloneqq(x_1^{-1},x_2^{-1},\dots x_n^{-1})^T$. Για $x\in S$, να δειχθεί ότι $c^T x^{-1}\geq\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ [Υπόδ. Να βρεθεί το ελάχιστο κατάλληλης αντικειμενικής συνάρτησης πάνω στο S].

ΘΕΜΑ ΙΑ (9/2009): Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού, το οποίο προκύπτει από ένα πρόβλημα κατανομής πόρων σε n δραστηριότητες:

$$\max \textstyle\sum_{i=1}^n c_i\, x_i$$

κα $\qquad 0\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$

$$\textstyle\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

όπου $0<c_1<c_2<\cdots<c_n$ γνωστοί παράμετροι.

ΘΕΜΑ ΙΒ (7/2009): Έστω $p\in\mathbb{P}^n$ κατανομή πιθανότητας πάνω σε n σημεία , δηλαδή $p=(p_1,p_2,\dots,p_n)$ με $p_i\geq 0,\ i=1,\dots,n,\ \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Επίσης, έστω

$$u_i(p)\coloneqq\begin{cases} p_i\ln(p_i) & \alpha\nu\ \ p_i>0\\ 0 & \alpha\nu\ p_i=0\end{cases}$$

Η ποσότητα $H(p)\coloneqq-\sum_{i=1}^n u_i(p)$ ονομάζεται εντροπία της κατανομής p και αποτελεί μέτρο της αβεβαιότητας του αποτελέσματος σε ένα τυχαίο πείραμα του οποίου η έκβαση ακολουθεί τη συγκεκριμένη κατανομή. Να βρεθεί, για δοσμένο n, η κατανομή πιθανότητας με τη μέγιστη εντροπία και να δειχθεί ότι τότε η εντροπία είναι $\ln(n)$.

ΘΕΜΑ ΙΓ (7/2009): Έστω σημείο $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ της μοναδιαίας κλειστής σφαίρας $\overline{S(0,1)}$ και έστω ότι $k_1,k_2,\dots,k_n$ είναι θετικοί ακέραιοι. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \ln x_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i \ln k_i - \frac{s}{2}\ln s$$

όπου $s := \sum_{i=1}^{n} k_i$.

ΘΕΜΑ ΙΔ (7/2009): Θεωρούμε θετικό ακέραιο $k, k \geq 3$, και θετικούς πραγματικούς $c_i, i = 1, \dots n$. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\min \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{c_i^{k-1}}$$

κα $\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n$$

ΘΕΜΑ ΙΕ (10/2007): Να βρεθεί ο κύλινδρος με μέγιστο όγκο μεταξύ των κυλίνδρων με εμβαδόν ολικής επιφανείας k^2. (Υπενθ. Εάν η ακτίνα βάσεως του κυλίνδρου είναι x_1 και το ύψος του είναι x_2, τότε το εμβαδόν ολικής επιφανείας του είναι $2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_1^2$).

ΘΕΜΑ ΙΣΤ (7/2007): Να βρεθεί το παραλληλεπίπεδο με μέγιστο όγκο μεταξύ των παραλληλεπιπέδων με εμβαδόν ολικής επιφανείας k^2.

ΘΕΜΑ ΙΖ (7/2007): Κατά τον έλεγχο της στοχαστικής ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών (π.χ. το ύψος του εισοδήματος συναρτήσει του μορφωτικού επιπέδου) απαιτείται η χρήση εκτιμητριών μεγίστης πιθανοφανείας. Αυτό οδηγεί στο πρόβλημα να βρεθούν τα $a_i,\ i = 1, \dots, I$ και $b_j,\ j = 1, \dots, J$ τα οποία επιλύουν το πρόβλημα

$$\max \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} \left(a_i b_j\right)^{n_{ij}}$$

κα $\quad \sum_{i=1}^{I} a_i = 1$

$$\sum_{j=1}^{J} b_j = 1$$

$$a_i \geq 0,\ i = 1, \dots, I$$

$$b_j \geq 0,\ j = 1, \dots, J$$

Οι αριθμοί n_{ij} είναι γνωστές παράμετροι--εκπροσωπούν τις παρατηρήσεις στο κελί (i, j). (Για διευκόλυνση στους συμβολισμούς, οι στατιστικοί χρησιμοποιούν τους τύπους $n_{i.} := \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$, $n_{.j} := \sum_{i=1}^{I} n_{ij}$, $n_{..} := \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$)

ΘΕΜΑ ΙΗ (9/2003): Είναι γνωστό ότι ο μέσος γεωμετρικός είναι μικρότερος ή ίσος του μέσου αριθμητικού. Εδώ θέλουμε να αποδείξουμε την ανισότητα αυτή μέσω μη γραμμικού προγραμματισμού (υπάρχει απόδειξη και μέσω δυναμικού προγραμματισμού στην οποία δεν αναφερόμαστε εδώ). Έστω λοιπόν $a_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n$. Να δειχθεί ότι

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

(Υπόδ. Να εξεταστεί το πρόβλημα $\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

κα $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$

$x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n$)