ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΟΝ «ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ»

Προσοχή: Οι απαντήσεις οφείλουν να είναι πλήρως αιτιολογημένες σύμφωνα με τη θεωρία, με σαφή επίκληση και απόδειξη των υποθέσεων κάθε θεωρήματος του οποίου γίνεται χρήση. Η «στεγνή» εύρεση σημείων ΚΚΤ, εκτός από το ότι μπορεί να μην οδηγεί στη λύση, δεν συνιστά απάντηση στα ερωτήματα.

*   *   *

ΘΕΜΑ Α (6/2015): Εξετάζεται το πρόβλημα: Για $0 < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n$ να

$$\max (1+x_1)^{k_1}(1+x_2)^{k_2}(1+x_3)^{k_3} \ldots (1+x_n)^{k_n}$$

κ.α. $\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$$x_i \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,n$$

(α) Να λυθεί το πρόβλημα αυτό για $n = 3, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$.

(β) Να γενικευτεί η λύση του (α) για αυθαίρετα $0 < k_1 < k_2 < k_3$.

(γ) Να γενικευτεί η λύση του (β) για το αρχικό πρόβλημα (αυθαίρετα $0 < k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n$.

ΘΕΜΑ Β (9/2011): Έστω D διαγώνιος $n \times n$ πίνακας με γνωστές θετικές ιδιοτιμές και επίσης $c_i, i = 1, \ldots n$ γνωστοί πραγματικοί αριθμοί. Ζητείται να λυθεί το πρόβλημα: $\quad \min \frac{1}{2} x^T D x$

κα $\quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq 1$

$$x_i \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,n$$

ΘΕΜΑ Γ (9/2011): Εάν $k > 0$, k γνωστός ακέραιος, να λυθεί το πρόβλημα:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^k}$$

κ.α. $\quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$

$$x_i \geq 0, \ i = 1,2,\ldots,n$$

ΘΕΜΑ Δ (9/2011): Εάν $c_i, i = 1, \ldots n$, είναι γνωστοί θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λυθεί το πρόβλημα

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

κ.α. $\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{c_i^2} \leq 1$

ΘΕΜΑ Ε (6/2011): (Πρόβλημα σύνθεσης χαρτοφυλακίου του Markowitz). Μία αγορά διαθέτει n αξίες (π.χ. μετοχές, ομόλογα, εμπορεύματα, κ.λπ.) των οποίων η απόδοση $r_i, i = 1, \ldots, n$, είναι τυχαία μεταβλητή με μέσο $u_i, i = 1, \ldots, n$, και διασπορά $\sigma_i^2, i = 1, \ldots, n$. Ως «χαρτοφυλάκιο» ορίζεται ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Η ερμηνεία είναι ότι διαθέτουμε κεφάλαιο 1 και επενδύουμε στην αξία i μέρος (ποσοστό) x_i του κεφαλαίου μας. Επιδίωξή μας είναι για δοσμένη αναμενόμενη απόδοση, να ελαχιστοποιήσουμε τον «κίνδυνο», δηλαδή τη διασπορά, του χαρτοφυλακίου μας. Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις:

<u>Προσέγγιση Α</u>: $x_i \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι τότε επιτρέπονται «ανοιχτές πωλήσεις» (short selling).

<u>Προσέγγιση Β</u>: $x_i \geq 0$. Λέμε ότι τότε ΔΕΝ επιτρέπονται «ανοιχτές πωλήσεις».

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου θα δίνεται από την τυχαία μεταβλητή $r \coloneqq \sum_{i=1}^{n} x_i\, r_i$. Προφανώς, η μέση τιμή της απόδοσης, έστω u, θα δίνεται από την $u = E[r] = \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i$ ενώ η διασπορά της θα δίνεται από τον τύπο $Var(r) = Var(\sum_{i=1}^{n} x_i\, r_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$, όπου θέσαμε $\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j)$ και όπου προφανώς $\sigma_{ii} = Cov(r_i, r_i) = Var(r_i) = \sigma_i^2$. Στόχος του διαχειριστή του χαρτοφυλακίου είναι, ανάμεσα σε όλα τα χαρτοφυλάκια που έχουν κάποια επιθυμητή αναμενόμενη απόδοση u, να βρεθεί το χαρτοφυλάκιο x με την ελάχιστη διασπορά, δεδομένου ότι τη διασπορά την αντιλαμβανόμαστε ως «κίνδυνο», τον οποίο εύλογα επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Παρατηρούμε ότι αν $\sum$ είναι ο πίνακας των συνδιακυμάνσεων της r, δηλαδή αν $(\sum)_{ij} = \sigma_{ij}$, τότε $Var(r) = x^T \sum x$. Από τις πιθανότητες γνωρίζουμε ότι ο $\sum$ είναι (συμμετρικός) θετικά ημιορισμένος πίνακας. Επομένως, ανάλογα με την προσέγγιση, επιθυμούμε να επιλύσουμε το εξής πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού:

<u>Προσέγγιση Α</u>:

$$\min \frac{1}{2} x^T \sum x$$

κα

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = u_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

<u>Προσέγγιση Β</u>:

$$\min \frac{1}{2} x^T \sum x$$

κα

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i = u_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \;\; i = 1,2, \dots, n$$

(α) Να αιτιολογηθεί ότι τα σημεία ΚΚΤ επιλύουν και τα δύο προβλήματα και να δοθούν οι συνθήκες ΚΚΤ για αυτά.

(β) Αν η κατανομή πιθανότητας της r είναι μη εκφυλισμένη, τότε ο πίνακας $\sum$ είναι θετικά ορισμένος. Για την περίπτωση αυτή να δοθεί τύπος που επιλύει το πρόβλημα (Α) συναρτήσει των πολλαπλασιαστών Lagrange και στη συνέχεια να εξηγηθεί πώς θα υπολογιστούν αυτοί (υπόδ: Να χρησιμοποιηθούν πίνακες—ο τύπος που προκύπτει είναι κομψός)

(γ) Να λυθεί το (Α) αν $n = 3, u_i = i, \sigma_i^2 = 1, i = 1, \dots, 3$, και $\sigma_{ij} = 0$ αν $i \neq j$.

(δ) Στο (γ) παραπάνω έστω ότι $u_0 = 3$. Να δειχθεί ότι τότε η $x = (0,0,1)$ αποτελεί λύση για το (Β). Ποιος ο κίνδυνος τότε; Αν επιτραπούν ανοιχτές πωλήσεις (περ. (Α)) θα υπάρξει μείωση ή αύξηση του κινδύνου τότε;

ΘΕΜΑ ΣΤ (6/2011): Έστω ο ημίχωρος $H^+ \coloneqq \{x | x \in \mathbb{R}^n \ \tau.\omega.\ c^T x \geq 0\}$ και έστω $a \in \mathbb{R}^n$ με $a \notin H^+$. Να βρεθεί το σημείο του H^+ που είναι πλησιέστερο στο a.

ΘΕΜΑ Ζ (6/2011): Έστω $f(x) \coloneqq x_1^2 - kx_1x_2 + x_2^2,\ k \in \mathbb{R}$. Για τις τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως κυρτή, να λυθεί το πρόβλημα

$$\min f(x)$$

κα $\quad 0 \leq x_2 \leq \ln x_1$

ΘΕΜΑ Η (6/2011): Ένα ηλεκτρονικό σύστημα αποτελείται από n όμοια εξαρτήματα συνδεδεμένα εν σειρά. Η αξιοπιστία, δηλαδή η πιθανότητα να λειτουργεί, του i-εξαρτήματος εξαρτάται από τα χρήματα που στοίχισε η κατασκευή του, και δίνεται από τον τύπο $P(x_i) = 1 - e^{-\alpha x_i}$, όπου $\alpha > 0$ και $x_i > 0$ τα χρήματα που στοίχισε. Αν υποθέσουμε ότι τα ενδεχόμενα να λειτουργούν τα εξαρτήματα είναι στοχαστικά ανεξάρτητα, τότε η αξιοπιστία του συστήματος θα είναι το γινόμενο των αξιοπιστιών των εξαρτημάτων. Να διατυπωθεί και να επιλυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης της αξιοπιστίας του συστήματος εάν διαθέτουμε ποσότητα $k > 0$ χρημάτων.