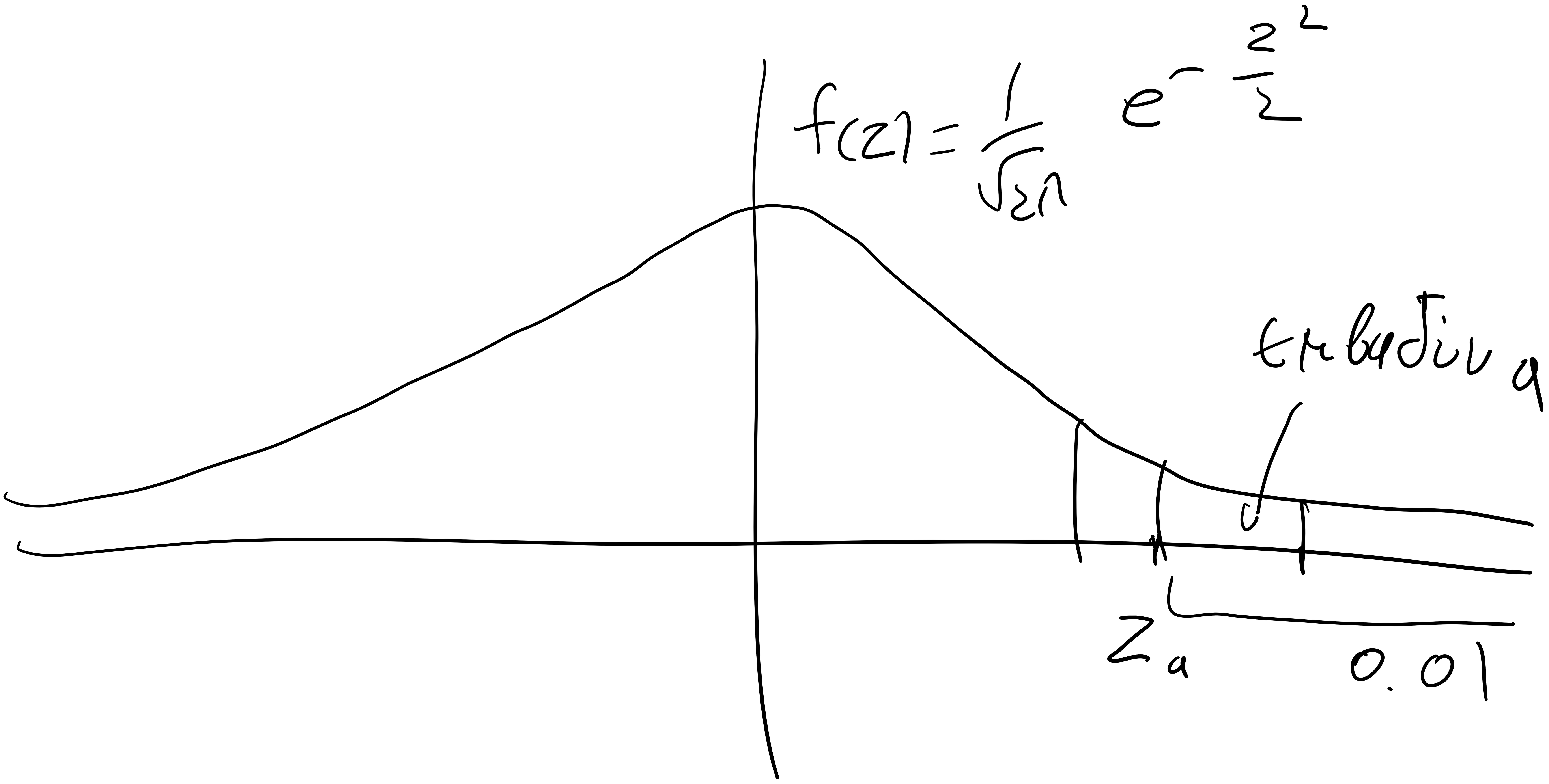


$$P\left(Z > \theta \frac{ES}{\sqrt{Var(ES)}}\right) = a$$

$= z_a$

$\leq a$

$\geq z_a$

Για το $z_{0.01}$ ισχύει

$$\Phi(z_{0.01}) = 0.99$$

Κουτσόπουλος § 6.4

Κατανομή αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών

2 μέθοδοι

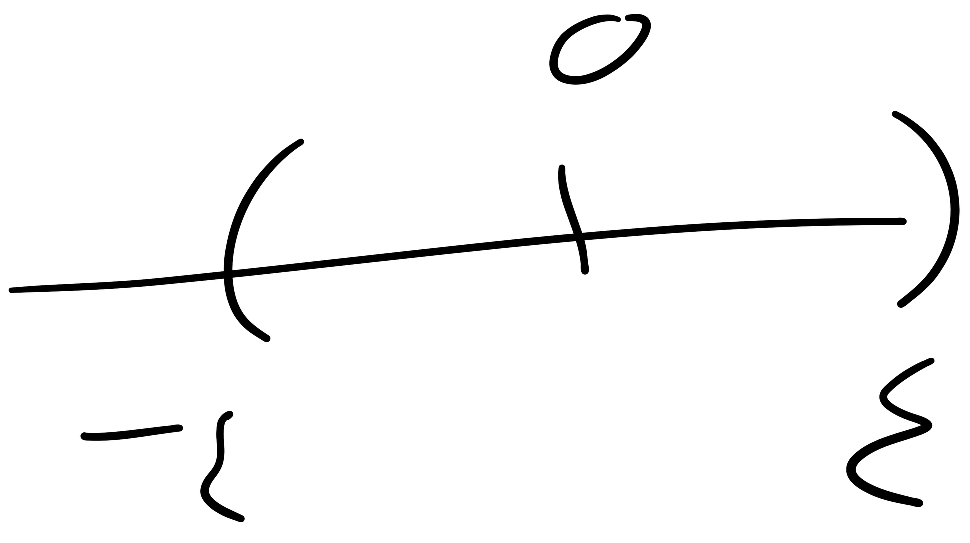
- Ροπογεννήτριες
- Συνελίξεις

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \in (0, \infty]$$

Σημαντικό: X, Y τ.μ. ώστε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$M_X(t) = M_Y(t) < \infty \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Τότε $X \overset{d}{=} Y$



Παράδειγμα (α) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(θ) Αν $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ $i=1,\ldots,n$
$X_1,\ldots,X_n$ ανεξάρτητες. Τότε
$X_1+\cdots+X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$

Λύση

(α) $$E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)}$$

$X_1 \quad \ldots \quad X_n$

$\underline{e^{X_1}}$, $\underline{\cos X_2}$, $\underline{X_n^2}$

(β) Για $t \in \mathbb{R}$,

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \cdots e^{tX_n})$$

$$= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \cdots E(e^{tX_n})$$

$$= e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} \cdots e^{\lambda_n(e^t-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(e^t-1)}$$

παίρνω μια $W \sim Poisson(\lambda_1 + \quad + \lambda_n)$

τότε $M_W(t) = e^{(\lambda_1 + \quad + \lambda_n)(e^t - 1)}$

$= M_{X_1 + \quad + X_n}(t)$

∴ Άρα $X_1 + \quad + X_n \overset{d}{=} W$

<u>Παράδειγμα</u> $X, Y \sim U(0,1)$ ανεξάρτητες. Τι κατανομή έχει η $X+Y$;

Η ροπογεννήτρια της X είναι (για $t \neq 0$)

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx}\,dx$$

$$= \frac{e^{tx}}{t}\Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\,M_Y(t) = \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^2$$

? Με συνέλιξη σε λίγο.

Η κατανομή αθροίσματος μέσω συνέλιξης

A] X_1, X_2 διακριτές τ.μ. ανεξάρτητες με την X_1 να παίρνει τιμές στο $\{z_i : i \in I\} \subset \mathbb{R}$, I αριθμήσιμο τότε η $X_1 + X_2$ είναι διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X_1+X_2}(z) = P(X_1 + X_2 = z) =$$

$$\sum_{i \in I} P(X_1 = z_i, X_2 = z - z_i)$$

$$= \sum_{i \in I} P(X_1 = z_i) P(X_2 = z - z_i)$$

$$= \sum_{i \in I} f_{X_1}(z_i) f_{X_2}(z - z_i)$$

$$\left(=: (f_{X_1} * f_{X_2})(z) \right)$$

$$\left(= \sum_{w\in\mathbb{R}} f_{X_1}(w)\, f_{X_2}(z-w) \right)$$

B/ X_1, X_2 συνεχείς τ.μ. ανεξάρτητες με πυκνότητες f_{X_1}, f_{X_2}.
Τότε η X_1+X_2 είναι συνεχής τ.μ. με πυκνότητα

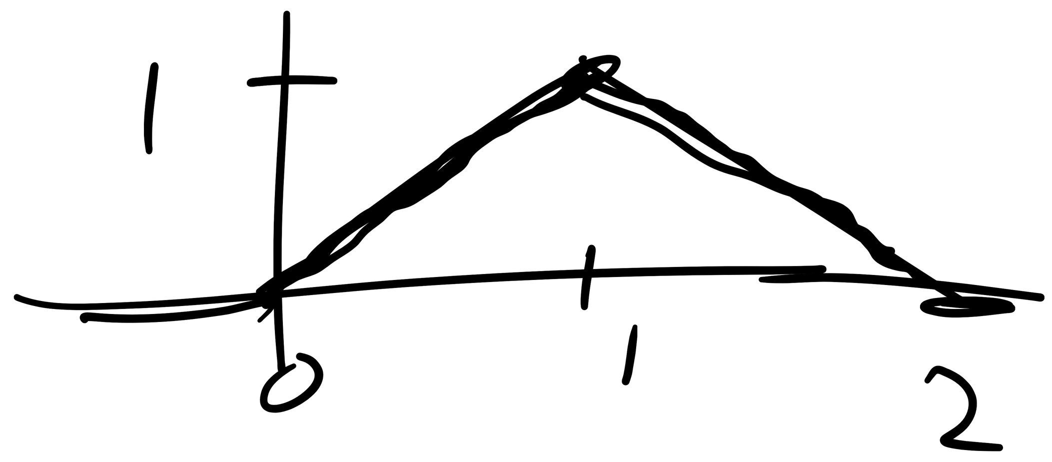
$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(w)\, f_{X_2}(z-w)\, dw$$

Συνέχεια του πιο πάνω παραδείγματος $X, Y \sim U(0,1)$ ανεξάρτητες.

$$f_Y(w) = f_X(w) = \begin{cases} 1 & w \in (0,1) \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(w)\, f_Y(z-w)\, dw$$

$$= \int_0^1 f_Y(z-w)\, dw \quad (*)$$



- Αν $z < 0$ τότε $z-w<0$ $\forall w \in [0,1]$

  και $(*) = 0$

- Αν $z > 2$ τότε $z-w > 1 \Rightarrow f_Y(z-w) = 0$

  και $(*) = 0$

· Αν $z \in [0, 1]$

$$f_Y(z-w) = 1 \iff 1 \geq z - w \geq 0 \quad z-1 \leq w \leq z$$

$$* = \int_0^z 1 \, dw = z$$

· Αν $z \in (1, 2]$

$$f_Y(z-w) = 1 \iff 1 \geq z - w \geq 0 \iff$$

$$z-1 \leq w \leq z$$

$$* = \int_{z-1}^{1} 1 \, dw = 2 - z$$

Άρα
$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0 & \text{αν } z < 0 \text{ ή } > 2 \\ z & \text{αν } z \in [0,1] \\ 2-z & \text{αν } z \in [1,2] \end{cases}$$

Η συνέλιξη διατηρεί και στις "επόμενες" κατανομές

Το συλλογικό πρότυπο

Έχουμε N τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$

και $X_i : i=1,2,\dots$ τ.μ. ανεξάρτητες ισόνομες και ανεξάρτητες από την N.

Θέτουμε $S := X_1 + \quad + X_N$ | $S=0$ αν $N=0$

$$\underbrace{X_1, X_2 \qquad , X_{48},} X_{49}, X_{50}, X_{51}$$

(Στο ατομικό είχαμε

$$S = X_1 I_1 + \qquad + X_n I_n$$)

Άσκηση έστω $q \in (0,1)$

X, Y, I ανεξάρτητες τ.μ. με $I \sim \text{Bernoulli}(q)$

Έστω $T = qX + (1-q)Y$

$$Z = IX + (1-I)Y$$

Συγκρίνετε τις $E(T), E(Z)$ και τις $E(T^2), E(Z^2)$

Υποθ. ότι $X, Y \geq 0$ με $E(X^2), E(Y^2) < \infty$

Λύση

$$ET = qEX + (1-q)EY$$

$$ET^2 = q^2 E(X^2) + (1-q)^2 E(Y^2) + 2q(1-q)E(XY)$$

Για την Z θα χρησιμοποιήσω την σχέση

$$E(W) = E(E(W|R)) \leftarrow$$

$$E(Z) = E(E(Z|I)) = E(m(I))$$

$$m(x) = E(Z|I=x)$$

$$m(0) = E(Z|I=0) = EY$$

$$m(1) = E(Z|I=1) = EX$$

$$EZ = m(0)P(I=0) + m(1)P(I=1)$$
$$= EY(1-q) + EXq \; (=ET)$$

$$EZ^2 = E(E(Z^2|I))$$

$$= E(Z^2|I=0)P(I=0) +$$
$$E(Z^2|I=1)P(I=1)$$
$$= EY^2(1-q) + E(X^2)q$$

$$E(T^2) = E((qX+(1-q)Y)^2)$$
$$\leq E(qX^2+(1-q)Y^2) = E(Z^2)$$

Χαρακτηριστικά της S

<u>Θεώρημα</u>

(α) $E S = EN\, E X_1$

(β) $Var(S) = EN\, Var(X_1) + (E(X_1))^2\, Var(N)$

(γ) $M_S(t) = M_N(\log M_X(t))$

Αποδ.

$S = X_1 + \quad + X_N$

(α) $E S = E(E(S|N)) = E(N\, E X_1)$

$= E X_1\, EN$

(β) $Var(S) = Var(E(S|N)) + E(Var(S|N))$

$= Var(N\, E X_1) + E(N\, Var(X_1))$

$= (E X_1)^2\, Var(N) + Var(X_1)\, EN$

(γ) $E(e^{tS}) = E(E(e^{tS}|N)) =$

$= E(E(e^{t(x_1 + \quad + x_N)})|N))$

$= E((E(e^{tX_1}))^N) = E(e^{N \log E(e^{tX_1})})$

$$= M_{x_1}(\log M_{x_1}(t))$$ //

Επόμενο θέμα: η κατανομή της S.

Υποθέτουμε ότι οι X_i παίρνουν τιμές ≥ 0.

$F_S(x) = P(S \leq x)$ (αυτό $=0$ αν $x<0$)

Αν $x \geq 0$,

$$F_S(x) = P(S \leq x) \overset{\text{θ. ολικής πιθανότητας}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(S \leq x \mid N=k) P(N=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k \leq x \mid N=k) P(N=k)$$

$[S_k = X_1 + \quad + X_k]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k \leq x) P(N=k) \qquad (**)$$

Δύο σενάρια

α) Η X_1 είναι διακριτή τ.μ.

τότε και η S είναι διακριτή τ.μ. και έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_S(x) = P(S=x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P(S_k = x)} P(N=k)$$

β) Η X_i είναι συνεχής τ.μ. | $S = X_1 + \dots + X_N$

Τότε η S έχει μάζα

$P(S=0) = P(N=0)$ στο 0

ενώ για $x > 0$ έχει πυκνότητα

$$f_S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{S_k}(x)\, P(N=k)$$

(ο όρος $k=0$ ήταν $P(\overset{=0}{S_0} \le x)\, P(N=0) = P(N=0)$)

Άρα αν $P(N=0) > 0$, τότε η S έχει μικτή κατανομή.

$\Gamma(a,\lambda)$ έχει πυκνότητα $f(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{x>0}$

$a, \lambda > 0$

και ροπογεννήτρια $M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^a} & \text{αν } t < \lambda \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda \end{cases}$

Έπεται ότι αν X, Y ανεξάρτητες με

$X \sim \Gamma(a_1, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(a_2, \lambda)$ τότε $X + Y \sim \Gamma(a_1 + a_2, \lambda)$

Άσκηση: Έστω ότι η N έχει συν. πιθανότητας

$$P(N=n) = p(1-p)^n, \quad n=0,1,2\ldots$$

$p\in(0,1)$, $q:=1-p$.

$$\underbrace{\underline{A}\ \underline{A}\ \underline{A}}_{N=3}\ \underline{E}\ \_\ \_$$

και η $X_1 \sim \exp(\theta)$, $\theta>0$

ποια η κατανομή της S;

Λύση

Η S έχει μάζα $P(S=0)=P(N=0)=p$ στο 0.

Στο $(0,\infty)$ έχει πυκνότητα

$$f_S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{S_k}(x)\, P(N=n)$$

α, λ $\qquad e^{-\theta x}\mathbb{1}_{x>0}$

$$X_1 \sim \exp(\theta) = \Gamma(1,\theta)$$

$$S_k \sim \Gamma(k,\theta)$$

Άρα
$$f_S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{\underbrace{\Gamma(k)}_{=(k-1)!}} x^{k-1} e^{-\theta x}\, p(1-p)^k$$

$$= e^{-\theta x}\,\theta(1-p)p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}\big(\theta x(1-p)\big)^{k-1}$$

$$= e^{-bx} b p(1-p) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (bx(1-p))^j$$

$$= e^{-bx} b p(1-p) e^{bx(1-p)} =$$

$$= b p(1-p) e^{-pbx}$$

Σύνθετες κατανομές

είναι οι δυνατές κατανομές της S πιο πάνω.

Αν η $N \sim$ Poisson η S λέγεται σύνθετη Poisson.

$\sim$ Γεωμετρική η S λέγεται σύνθετη Γεωμετρική

Αν $X_i = 1$ $\forall i$ τότε

$$S = N \quad \begin{matrix} 1+ & +1 \\ X_1 + & + X_N \end{matrix}$$

Αν $N \sim$ Poisson(λ) τότε η ροπογεννήτρια της S είναι

$$M_S(t) = M_N(\log M_X(t)) = e^{\lambda(e^{\log M_{X_i}(t)} - 1)}$$

$$= e^{\lambda(M_{X_i}(t) - 1)}$$

Ιδιότητες της σύνθετης Poisson

Αν η X_1 έχει συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας f και $N \sim Poisson(\lambda)$ λέμε ότι η S παράγεται από το ζευγάρι (λ, f)

Α) Αν οι $S^{(1)}, \dots, S^{(k)}$ είναι ανεξάρτητες και παράγονται από τα $(\lambda_1, f_1), \dots, (\lambda_k, f_k)$ τότε η

$S := S^{(1)} + \dots + S^{(k)}$ είναι σύνθετη

Poisson και παράγεται από το ζευγάρι (λ, f) όπου $\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_k$

$$f(x) := \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)$$

$$E(e^{tS^{(1)}}) = e^{\lambda(M_{X_1}(t) - 1)} \qquad \lambda, f$$

$$M_{X_1}(t) = \int e^{tx} f_{X_1}(x)\,dx$$

$$E(e^{t(S^{(1)} + \dots + S^{(k)})}) = e^{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (M_{X_i}(t) - 1)}$$

$$= e^{\lambda\left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} M_{X_i}(t)\right) - 1\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} E(e^{tX_i}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_{X_i}(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} f_{X_i}(x) \right) e^{tx}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{tx}\,dx \qquad \blacksquare$$

B) εκλέπτυνση

S σύνθετη Poisson που ορίζεται από το (λ, f) όπου η X_1 παίρνει τιμές στο $\{a_1, \dots, a_M\}$ και έχει συνάρτηση πιθανότητας f. $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$

Έστω $N_i = \#\{ j \in \{1, \dots, N\} : X_j = a_i \}$
$i = 1, 2, \dots, M$.

Τότε οι $N_1, \dots, N_M$ είναι ανεξάρτητες και $N_i \sim \text{Poisson}(\lambda f(a_i))$

Poisson(λ) — 0.6 μικρές — Poisson(0.6λ)

0.4 μεγάλες — " (0.4λ)

Μεμειγμένες κατανομές

(≠ μεικτές)

$e^{-\lambda x} 1_{x>0}$

Παράδειγμα $X \sim exp(\Lambda)$ όπου

$\Lambda \sim exp(1)$. Για αυτήν έχουμε

$$P(X \in A) = \int P(X \in A \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda$$

$A \subset [0, \infty)$

Η X έχει ανάμειξη κατανομής

$$P(X \le x) = \int_0^\infty P(X \le x \mid \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\, e^{-\lambda}\, d\lambda \qquad \Big|\ f_\Lambda(t) = e^{-t} 1_{t>0}$$

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-\lambda(1+x)}\, d\lambda$$

$$= 1 - \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{e^{-\lambda(1+x)}}{-(1+x)} \right) d\lambda =$$

$$= 1 - \left(0 + \frac{1}{1+x} \right) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

Πυκνότητα $\quad f_X(x) = \frac{1}{(1+x)^2} 1_{x>0}$