Κ. Κουτσόπουλος. Αναλογιστικά μαθηματικά. 1999. Εκδ. Συμμετρία.

Κεφ 1-11

Kaas, Goovaerts, ...

Modern actuarial risk theory using R

Θεωρία ωφελιμότητας

Αμερόληπτο νόμισμα

Κερδίζουμε 10 € αν έρθει Κ

" 0 € αν " Γ

Πόσος ξ € για να παίξουμε

$$\frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}0 = 5$$

Παίζουμε n φορές

$X_i :=$ κέρδος της i φοράς

$$S_n = X_1 + \quad + X_n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = EX_1 = 5$$

$$\frac{S_n}{n} \simeq 5 \qquad S_n \simeq 5n$$

4.5

$5n - 4.5 \cdot n = 0.5n \qquad \leftarrow 4.99$

5.5

$5n - 5.5n = -0.5n \qquad 5.11$

5

$$X = \begin{cases} 10 & \text{με πιθ } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{''} \end{cases}$$

EX

John von Neumann + Oskar Morgenstern

Άτομο → Συνάρτηση ωφελιμότητας

$\mathcal{P}$ = σύνολο των καταστάσεων που μπορεί να επιλέξει το άτομο

Υποθέτουμε ότι στο $\mathcal{P}$ ορίζεται μια σχέση σύγκρισης $\succ$

Για $P, Q \in \mathcal{P}$, $P \succ Q$ σημαίνει ότι το άτομο προτιμά την P από την Q.

$P \approx Q$: το άτομο είναι αδιάφορο μεταξύ P και Q

Για $P, Q \in \mathcal{P}$ και $\lambda \in [0,1]$

ισχύει ότι $\lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{P}$

έχω νόμισμα που φέρνει K με π.θ. λ - το ρίχνω, και αν φέρει K κάνω το P

αν θέλει Γ κάνω το Q

Υποθέτουμε ότι η $\succ$ έχει τις εξής ιδιότητες

Υποθέτουμε ότι η $\succ$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Για κάθε $P, Q \in \mathcal{P}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής: $P \succ Q, Q \succ P, P \approx Q$. Ολική διάταξη

(ii) Αν $P \succ Q$ και $Q \succ R$, τότε $P \succ R$. Μεταβατικότητα

(iii) Αν $P \succ Q \succ R$, τότε υπάρχουν $\lambda, \mu \in (0,1)$ ώστε $\lambda P + (1-\lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu)R$. Αρχιμήδεια ιδιότητα

(iv) Αν $P \succ Q$, τότε για κάθε $R \in \mathcal{P}$ και $\lambda \in (0,1)$ ισχύει ότι $\lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$.

Κάθε $P \in \mathcal{P}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή

Αν η $\succ$ έχει τις ιδιότητες (i)–(iv) τότε υπάρχει $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\underline{P \succ Q} \Leftrightarrow \underline{E\,u(P)} > E\,u(Q)$$

Η u λέγεται συνάρτηση ωφελιμότητας του ατόμου

30 8i

10

Ζαρι

$$u^*(x) = a\,u(x) + b \qquad a>0,\ b\in\mathbb{R}$$

<u>Άσκηση</u> Άτομο έχει σ.ω.

$$u(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases} \qquad 200\sqrt{x}$$

Επιλέγει μεταξύ δύο τυχαίων ποσών

$$X=\begin{cases}400 & \text{με πιθ. } \tfrac{1}{2}\\ 900 & \text{''}\end{cases} \qquad EX=650$$

$$Y=\begin{cases}100 & \text{με πιθ. } 0.6\\ 1600 & \text{''} \quad 0.4\end{cases} \qquad EY=60+4\cdot 160=700$$

με ποσά όλη του την περιουσία.

(α) Ν.δ. ότι το άτομο προτιμάει το X

(β) Για ποιες τιμές του w αρνείται την προσφορά.

(γ) Βρείτε μετασχηματισμό σ.ω. $\tilde{u}$ ώστε με βάση αυτήν να προτιμάται η Y.

Λύση

(α) $Eu(X) = E(\sqrt{X}) = \frac{1}{2}\sqrt{400} + \frac{1}{2}\sqrt{900}$

$= 10 + 15 = 25$

$Eu(Y) = E(\sqrt{Y}) = 0.6\sqrt{100} + 0.4\sqrt{1600}$

$= 0.6 \cdot 10 + 0.4 \cdot 40 = 6 + 16 = 22$

$Eu(Y) < Eu(X)$ Άρα $X \succ Y$.

(β) w, X, Y

$Eu(w) = u(w) = \sqrt{w}$

Αρκεί αν $\sqrt{w} > Eu(X) = 25$

$w > 625$

(γ) Η $\tilde{u}(x) = x$ έχει

$E\tilde{u}(X) = EX = 650$

$E\tilde{u}(Y) = EY = 700$

Άρα τώρα $Y \succ X$

Τέσσερα σενάρια

α) Άτομο έχει περιουσία w και συνάρτηση ωφελιμότητας u. Αντιμετωπίζει κίνδυνο X. Δέχεται να ασφαλιστεί με G αν

$$E\, u(w-G) \geq E\, u(w-X)$$

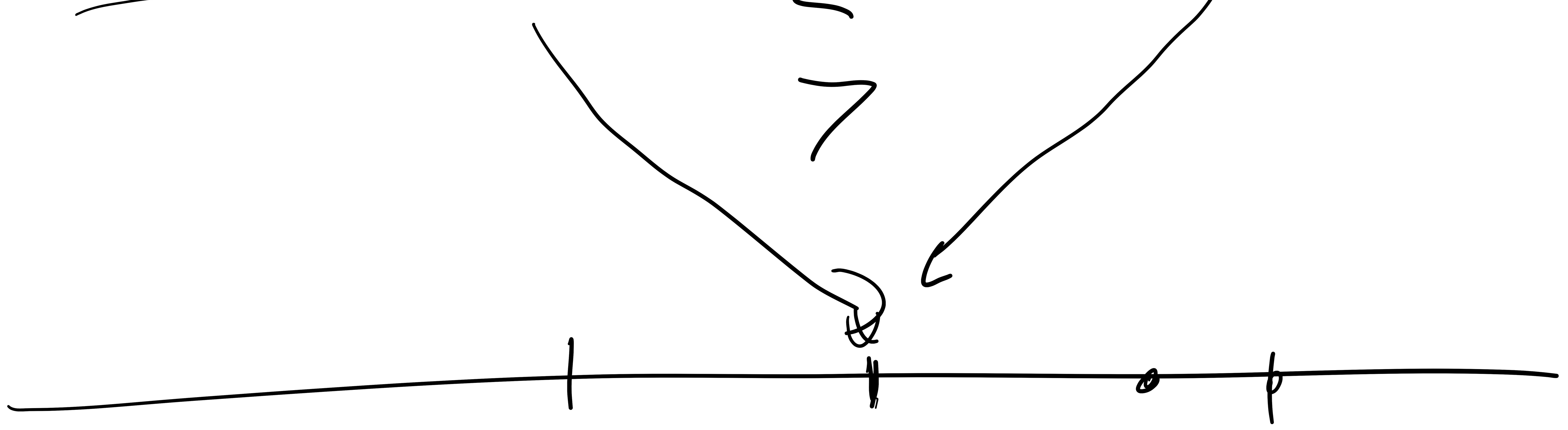
δηλ. $u(w-G) \geq E\, u(w-X)$

Το μέγιστο G που είναι αποδεκτό

$$u(w-G_{max}) = E\, u(w-X)$$

$<$

$>$



β) Ασφαλιστής έχει περιουσία w και σ.ω. u. Αναλαμβάνει κίνδυνο X. Δέχεται την ασφάλιση αρκεί το ποσό u σφάλισης, G και ικανοποιεί την

$$\Big(\quad w \quad , \quad w + G - X \Big)$$

$$E\,u(w) \le E\,u(w + G - X)$$

$$\overset{\shortparallel}{u(w)} = E\,u(w + G_{min} - X)$$

(γ) Άτομο με σ.ω. u, πλούτο w, έχει δικαίωμα σε τυχαίο κέρδος X.
Το ελάχιστο που δέχεται για να παραχωρήσει του κέρδους είναι το K_{min}

με $\quad \underline{w + X} \quad \underline{w + K}$

$$E\,u(w + X) = u(w + K_{min})$$

(δ) Άτομο με σ.ω. u, πλούτο w αγοράζει δικαίωμα σε κέρδος X.
Το μέγιστο που δέχεται να πληρώσει είναι το K_{max} με

$w \qquad , \qquad w + X - K$

$$u(w) = \underline{E\, u(w + X - K_{max})}$$

Κινδυνοφοβία

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ωφελιμότητας

(είναι γνήσια αύξουσα)

Το άτομο λέγεται κινδυνόφοβο αν

για κάθε τυχαίο κέρδος X

προτιμάει το ποσό $\underline{EX}$ από το τυχαίο

ποσό X

10 ~~πιθ~~ $1/2$

0 " $1/2$

Δηλ. $u(EX) \geq Eu(X)$ *

$u(\underline{EX}) \quad Eu(X)$

Ανισότητα

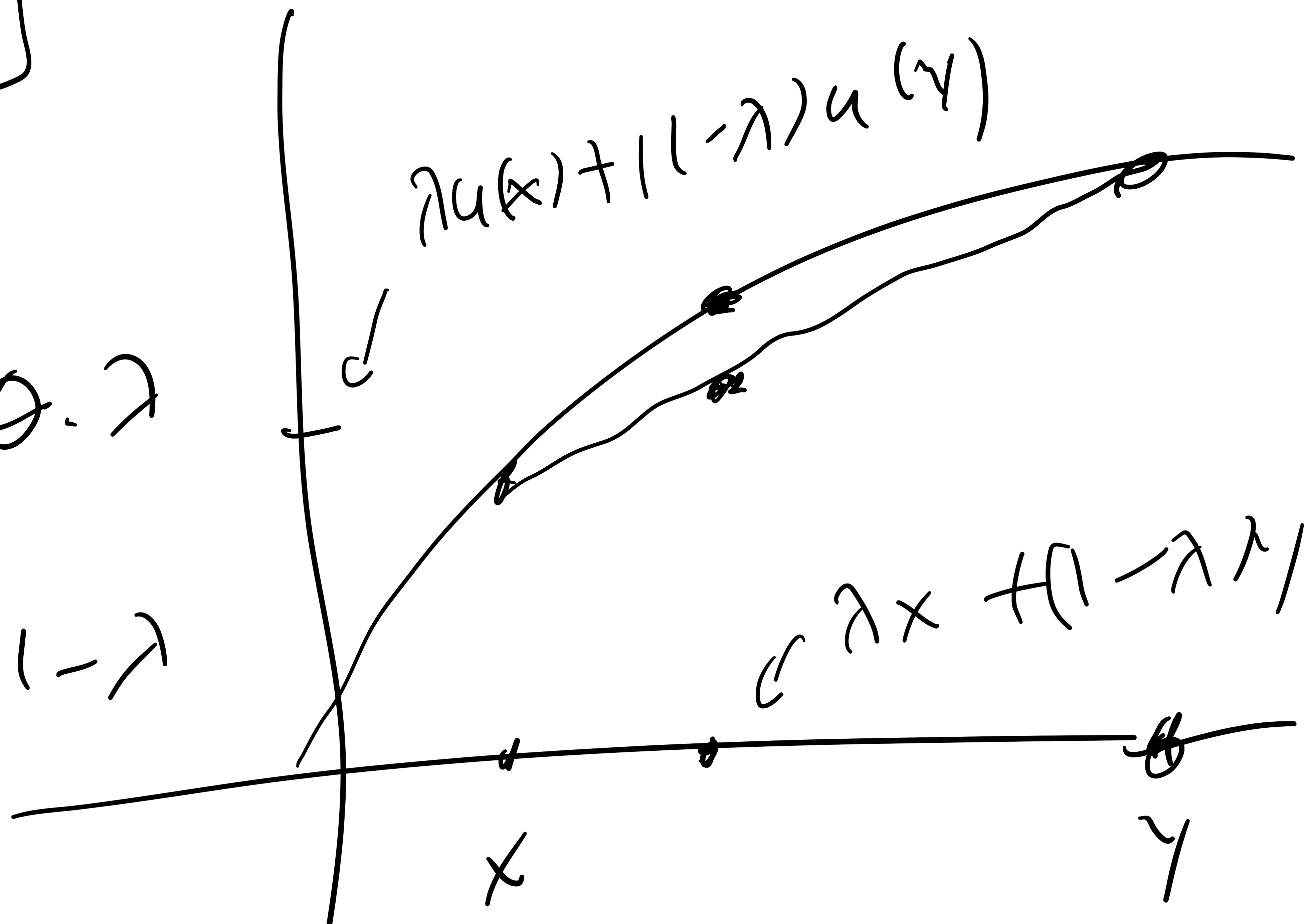
Jensen

Η ⊛ λέει ότι η u είναι κοίλη

Για $x \in [0,1]$

ουσιαστικά

$$X = \begin{cases} x & \text{με πιθ. } \lambda \\ y & \text{" } 1-\lambda \end{cases}$$



$EX = \lambda x + (1-\lambda) y$ $y - \lambda(y-x)$

$Eu(X) = \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y)$

$u(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda) u(y)$

$u'' \leq 0$ $u' \downarrow$

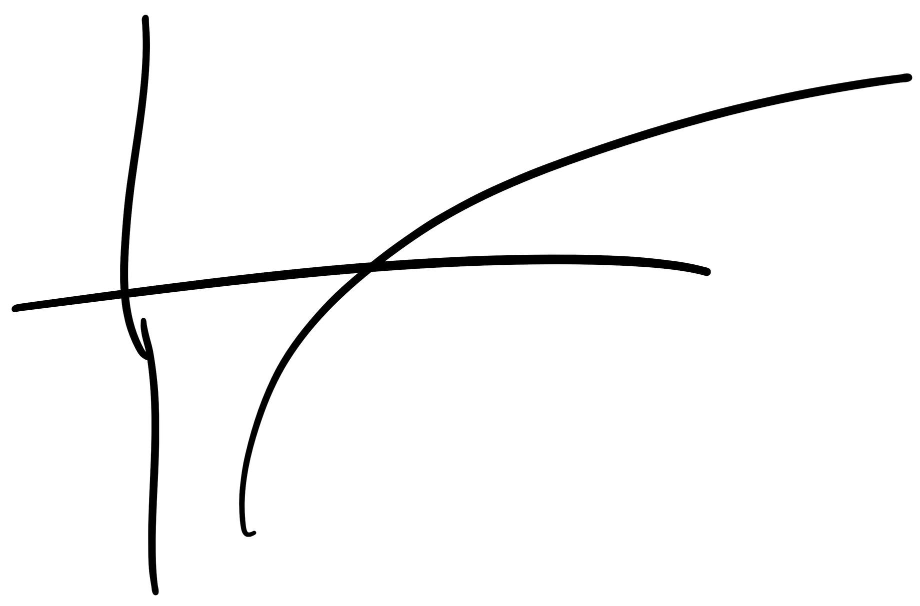
Κινδυνόφοβο λέγεται ένα άτομο αν

$X \succ EX \quad \forall$ τ.μ. X

Έστω έχει σ.ω. u που είναι κυρτή

Παραδείγματα

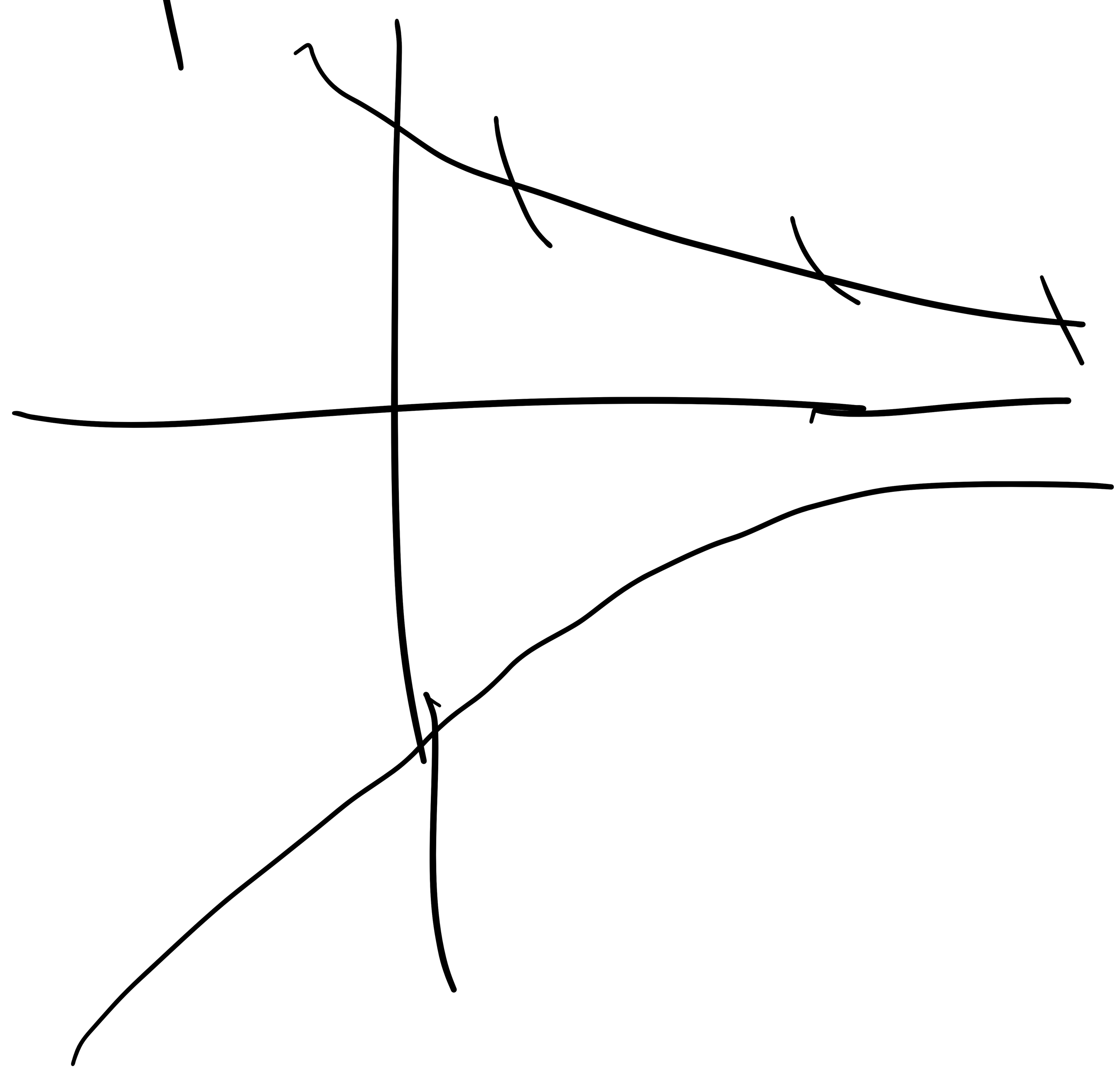
Κοίλες σ.ω. $\log x$ στο $(0,\infty)$



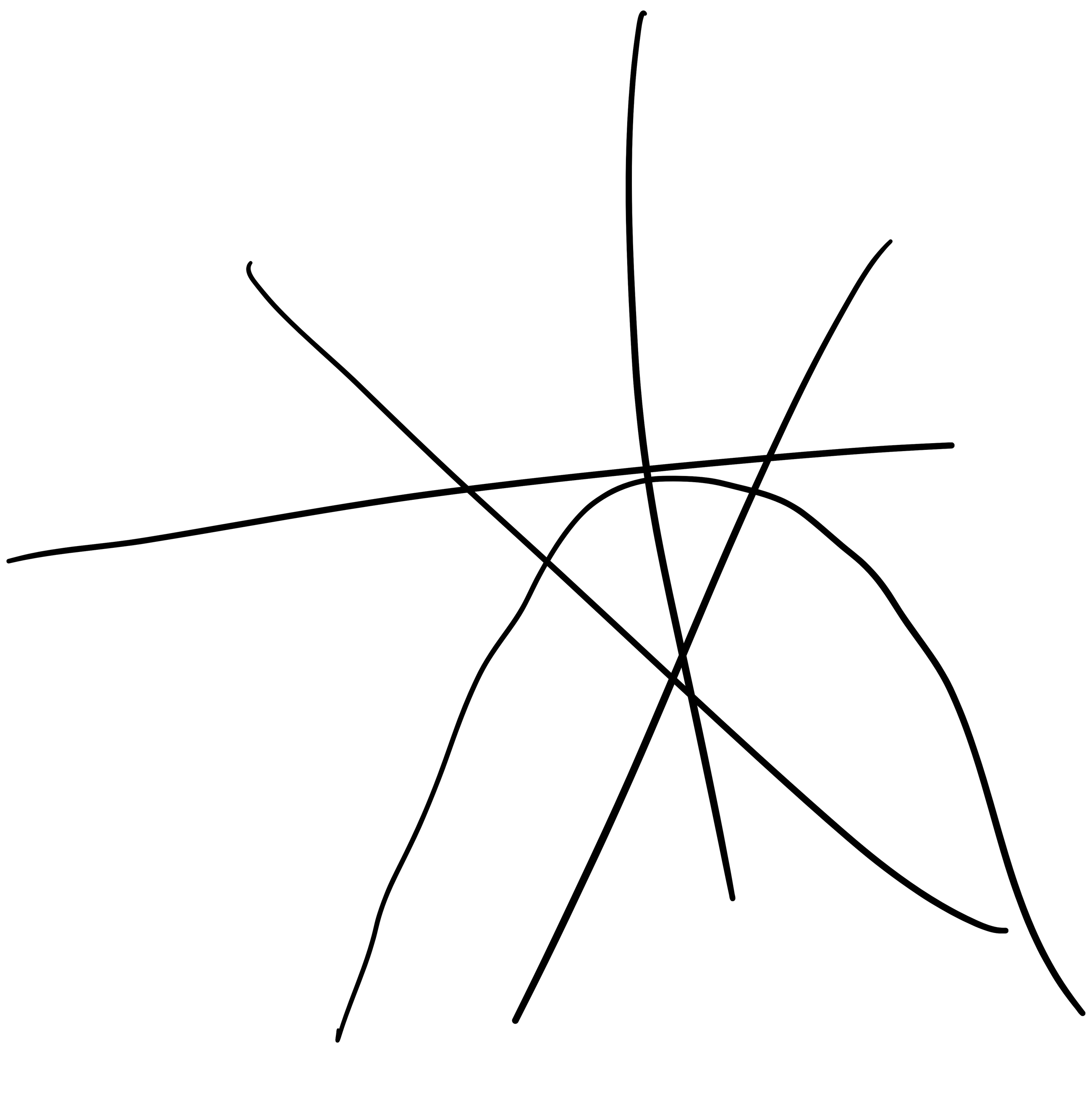
x^c με $c \in (0,1)$

↳ $c(c-1)x^{c-2} < 0$

$-e^{-ax}$, $a>0$

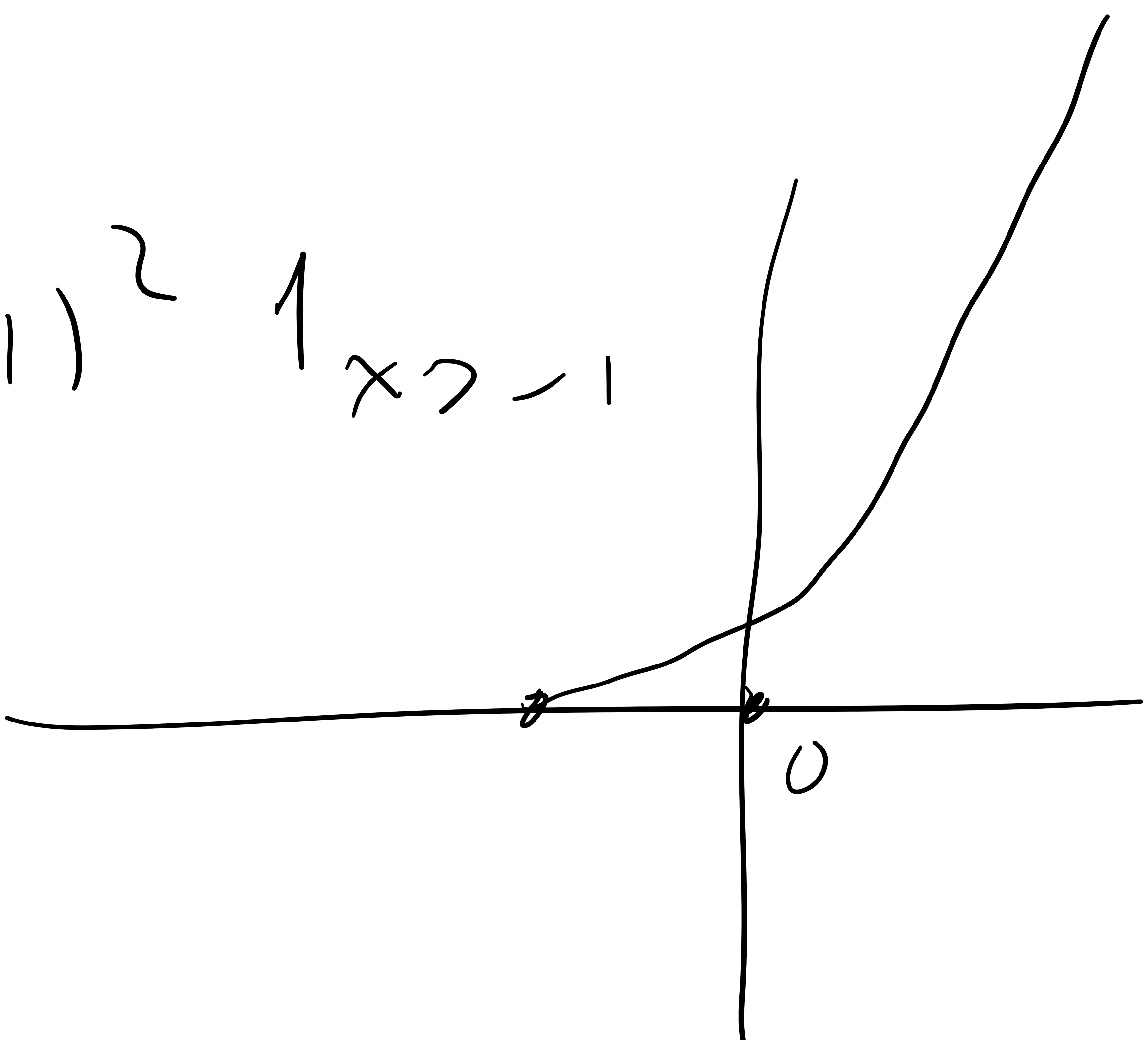


$-x^2$



Κυρτές σ.ω.

e^x, $(x+1)^2 1_{x>-1}$



Ανισότητα Jensen

Αν $u: I \to \mathbb{R}$ κοίλη, I διάστημα

X τ.μ. με τιμές στο I. Τότε

$$u(EX) \geq Eu(X)$$

Αν η u κυρτή, τότε

$$u(EX) \leq Eu(X)$$

u κοίλη $\Leftrightarrow$ $-u$ κυρτή

Άσκηση

Άτομο έχει πλούτο $w=1000$

και σ.ω. με $u(0)=0$, $u(w)=10$

Αντιμ. κίνδυνο X με

$$X = \begin{cases} A & \text{με πιθ. } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{''} \ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Για τις τιμές 1000, 600, 350 του A
το μέγιστο ποσό που δέχεται να πληρώσει
για να ασφαλιστεί είναι 600, 350, 200
αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι $u(x)$ για κάθε $x \neq 0, w$

(β) Είναι συμβατό να είναι το άτομο κινδυνόφιλο;

Λύση

(α) $A = 1000$, $G_{max} = 600$

$w - G_{max}$, $w - X$

$u(w - G_{max}) = E\,u(w - X)$

$u(\underline{400}) = \frac{1}{2} u(0) + \frac{1}{2} u(w)$

$= 5$

$A = 600$, $G_{max} = 350$

$u(w - 350) = E\,u(w - X|\Theta)$

$u(\underline{650}) = \frac{1}{2} u(1000 - 600) + \frac{1}{2} u(1000)$

$$= \frac{1}{2}u(400) + \frac{1}{2}10 = 7.5$$

$A = 350$, $G_{max} = 200$

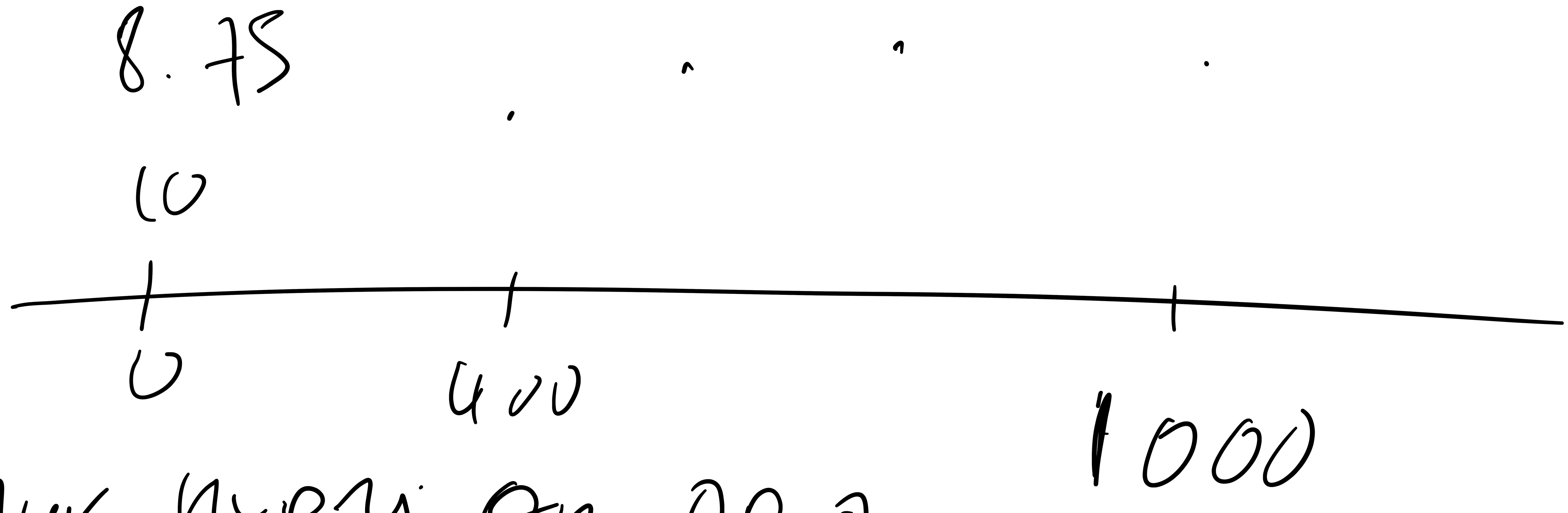
$$u(w-200) = E\,u(w-X)$$

$$u(800) = \frac{1}{2}u(1000-350) + \frac{1}{2}u(1000)$$

$$= \frac{1}{2}u(650) + \frac{1}{2}u(1000)$$

$$= \frac{1}{2}(7.5+10) = 8.75$$

0	0
400	5
650	7.5
800	8.75
1000	10



Αν ήταν κυρτή σε [illegible]

$$u(400) = u(0.6\cdot 0 + 0.4\cdot 1000) \leq$$

$$0.6\,u(0) + 0.4\,u(1000) = 0 + 0.4\cdot 10$$

$$= 4$$

Άσκηση 16 (Πανεπιστημιακές σελ 93)

Να βρεθούν τα G_{max}, G_{min}, H_{max}, H_{min} αν $u(x) = x^2$, $w > 0$ ο πλούτος του ατόμου, $X \sim U(0, w)$. $\leftarrow \frac{1}{w} 1_{(0,w)}(x)$

Λύση

G_{max} $\quad Eu(w - X) = Eu(w - G_{max})$

$$\Rightarrow (w - G_{max})^2 = E(w - X)^2$$

$$= \int_0^w (w-x)^2 \frac{1}{w}\, dx \overset{y = w - x}{=} -\int_w^0 \frac{y^2}{w}\, dy$$

$$= \frac{1}{w}\int_0^w y^2\, dy = \frac{w^3}{w \cdot 3} = \frac{w^2}{3}$$

$$w - G_{max} = \frac{w}{\sqrt{3}} \Rightarrow G_{max} = w\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \frac{w}{2} = EX$$

G_{min} . . . ,

H_{min}

$$Eu(w+X) = Eu(w+H_{min})$$

$$\Rightarrow u(w+H_{min}) = \frac{1}{w}\int_0^w (w+x)^2\,dx \overset{w+x=y}{=}$$

$$= \frac{1}{w}\int_w^{2w} y^2\,dy = \frac{1}{w}\,\frac{8w^3-w^3}{3} =$$

$$= \frac{7}{3}w^2 \Rightarrow (w+H_{max})^2 = \frac{7}{3}w^2$$

$$\Rightarrow w + H_{min} = \sqrt{\frac{7}{3}}\,w$$

$$H_{min} = \left(\sqrt{\frac{7}{3}} - 1\right) w > \frac{w}{2} = EX$$

<u>Πρόταση</u> Αν $u \nearrow$ και u κοίλη, τότε όλα τα ακέραια παραπάνω ισχύουν

$G_{max}, G_{min} \geq EX$

$H_{max}, H_{min} \leq EX$

$u(EX) \geq Eu(X)$

λύση

1) $w, \quad w + G_{min} - X$

$$u(w) = E\,u(w + G_{min} - X)$$

$$\leq u(w + G_{min} - EX)$$

$$\Rightarrow \quad w \leq w + G_{min} - EX$$

$$EX \leq G_{min}$$

2) H_{min}

$$\underline{u(w + H_{min})} = E\,u(w + X)$$

$$\leq u(E(w+X)) = u(\underline{w + EX})$$

$$\overset{u \nearrow}{\Longrightarrow} \quad w + H_{min} \leq w + EX$$

$$\Rightarrow \quad EX \geq H_{min}$$

Άσκηση (Ιούνιος 2011)

$w=1$, $u(x)=-e^{-x}$

Έχει διακύβευμα σε κέρδη $X \sim U(0,1)$

Επιλογή να ανταλλάξει το διακύβευμα με το ποσό K και διακύβευμα σε $Y \sim \exp(2)$

$\left(f(x)=2e^{-2x} 1_{x>0} \, , \; EY=\frac{1}{2} \right)$

Αν $K<0$, το άτομο δίνει $|K|$.

Για ποια K το άτομο δέχεται την ανταλλαγή

Λύση

Δέχεται : $w+K+Y$

Δεν δέχεται : $w+X$

$$E\,u(w+K+Y) \geq E\,u(w+X)$$

$$\iff -E\left(e^{-w-K-Y}\right) \geq -E\left(e^{-w-X}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-H} E(e^{-Y}) \le E(e^{-X})$$

$$\Rightarrow e^{H} \geq E(e^{-Y}) / E(e^{-X})$$

$$E(e^{-X}) = \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$E(e^{-Y}) = \int_0^\infty e^{-y}\, 2e^{-2y}\,dy$$

$$= \underbrace{2\int_0^\infty e^{-3y}\,dy}_{} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{e^{-3y}}{-3}\Big|_0^\infty$$

$$e^{H} \geq \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{e}} > 1, \quad H \geq \log\frac{2}{3} - \log\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

$$> 0$$

$$\frac{2}{3} > 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{3}$$