Θεωρία Κινδύνου ΜΑΠ

Εξετάσεις 15 Ιουνίου 2011

1. [Βαθμοί 2](α) Δίνεται κίνδυνος X με πυκνότητα

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{αν } x > 1, \\ 0 & \text{αν } x \leq 1. \end{cases}$$

Για $p = 3/4$ και $\varepsilon = 1/100$, να υπολογιστεί το ασφάλιστρο βασισμένο στην αρχή της μέγιστης απώλειας.

(β) Απο τις παρακάτω συναρτήσεις, ποιές είναι συναρτήσεις ωφελιμότητας και ποιές αντιστοιχούν σε κινδυνόφοβο άτομο? Ως πεδίο ορισμού για καθεμία θεωρούμε το $(0, \infty)$.

$$\log(x+3),\ -\sqrt{x},\ -1/x^3,\ -x^3,\ (x-7)^4,\ e^{-x},\ -e^{-x}.$$

2. [Βαθμοί 2] Άτομο με περιουσία $w = 1$ και συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -e^{-x}$ έχει δικαίωμα σε κέρδος X το οποίο ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$. Έχει και την επιλογή να ανταλάξει το δικαίωμα στο κέρδος X με ποσό K και δικαίωμα σε κέρδος Y που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2 (δηλαδή πυκνότητα $2e^{-2x}\mathbf{1}_{x>0}$). Το K μπορεί να είναι και αρνητικό, που σημαίνει ότι κατά την ανταλλαγή το άτομο δίνει ποσό $|K|$. Για ποιές τιμές του K το άτομο δέχεται την ανταλλαγή;

3. [Βαθμοί 3] Θεωρούμε άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = x|x|$ και περιουσία $w = 5$. Ο κίνδυνος X έχει ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 4]$.

(α) Για ποιά αναλογική ασφάλιση $I^\lambda(X) = \lambda X$ και ασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας $I_{x_1}(X) = (X - x_1)^+$ έχουμε $E(I^\lambda(X)) = E(I_{x_1}(X)) = 1$;

(β) Να δειχθεί ότι για το μέγιστο τίμημα G^λ που προτίθεται να πληρώσει το άτομο για να αγοράσει την ασφάλιση $I^\lambda(X)$ του ερωτήματος (α) ισχύει $G_\lambda \leq 2$.

(γ) Να υπολογιστεί το G^λ.

4. [Βαθμοί 2] Δίνεται χαρτοφυλάκιο n ανεξάρτητων ισόνομων κινδύνων ώστε ο καθένας έχει μέση τιμή $a > 0$, διασπορά a^2, και πραγματοποιείται (ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους) με πιθανότητα $q = 1/2$. Έστω S το σύνολο των ζημιών. Πληρώνουμε για την πλήρη ασφάλιση του χαρτοφυλακίου το ποσό $(11/10)E(S)$.

(α) Να βρεθεί η μέση τιμή και διασπορά του S.

(β) Μας δίνεται ότι η πιθανότητα το ασφάλιστρο να μην επαρκέσει είναι μικρότερη από 0.01. Να δειχθεί ότι $n \geq 1629$.

Για τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής δίνεται ότι $\Phi(-2.33) = 0.01$, $\Phi(2.33) = 0.99$.

5. [Βαθμοί 3] Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $(U(s))_{s\geq 0}$ με περιθώριο ασφάλειας θ και ζημιές $\{X_i : i \geq 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & \text{για } x \in (1, 3), \\ 0 & \text{για } x \in \mathbb{R} \setminus (1, 3), \end{cases}$$

οι οποίες συμβαίνουν με βάση μια ομογενή διαδικασία Poisson με παράμετρο $m = 3$.

(α) Ποιά είναι η ροπογεννήτρια της X_1?

(β) Να δειχθεί ότι ο συντελεστής προσαρμογής για την διαδικασία ικανοποιεί

$$R < \frac{13}{15}\,\theta =: R'.$$

(γ) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ απο αρχικό πλεόνασμα u ικανοποιεί

$$\psi(u) \geq e^{-(u+3)R'}$$

για κάθε $u \geq 0$.

(δ) Αν το αρχικό πλεόνασμα είναι 0, να υπολογιστεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y := -U(T)$ δεδομένου ότι συμβαίνει χρεοκοπία. Εδώ $T := \inf\{s > 0 : U(s) < 0\}$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**