

Άσκήσεις στα κεφάλαια 6, 7, 10

1. Άσκηση 22, σελίδα 101. Δίνεται για την κανονική κατανομή ότι $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(2.33) = 0.99$.

2. Άσκηση 27, σελίδα 102.

3. Άσκηση 8, σελίδα 128.

Στις παρακάτω ασκήσεις υποθέτουμε ότι είμαστε στο πλαίσιο του Κεφαλαίου 10. Τα ζημιογόνα γεγονότα συμβαίνουν με βάση μια ομογενή ανέλιξη Poisson, τα μέγεθθ τους είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_i, i \geq 1$, και το περιθώριο ασφάλειας είναι θ .

4. Άσκηση 30, σελίδα 214.

5. Έστω ότι οι X_i έχουν ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$. Να υπολογισθεί η προσέγγιση R_2 του συντελεστή προσαρμογής με χρήση του πολυωνύμου Taylor τρίτου βαθμού της ροπογεννήτριας της X_1 (σελ. 198).

6. Στην προηγούμενη άσκηση, έστω R ο συντελεστής προσαρμογής. Ναδειχθεί ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί

$$e^{-2(\sqrt{1+3\theta}-1)(1+u)} \leq \psi(u) \leq e^{-Ru}$$

για κάθε $u > 0$.

7. Αν οι X_i έχουν κατανομή $\exp(\beta)$, να βρεθεί η κατανομή του $u - U(T')$ τον πρώτο χρόνο T' που η διαδικασία του πλεονάσματος πέφτει κάτω από το αρχικό κεφάλαιο δεδομένου ότι αυτό συμβαίνει (δηλ., $T' < \infty$).

Σχόλια

1. Χρησιμοποιούμε τη μεθοδολογία της σελίδας 89 (τελευταία παράγραφος). Ισχύει $E(S) = nq$, $Var(S) = nq + nq(1 - q) = nq(2 - q)$ γιατί οι X_i έχουν μέση τιμή και διασπορά 1. Άρα $E(S)/\sqrt{Var(S)} = \sqrt{nq}/\sqrt{2 - q}$.

(i) Λύνουμε ως προς n την $\sqrt{Var(S)}/E(S) = 1/10$.

(ii) Λύνουμε ως προς n την $\theta E(S)/\sqrt{Var(S)} = z_{0.025}$.

(iv) $\theta/\theta_1 = z_{0.01}/z_{0.05}$. Με τις δοσμένες τιμές της Φ το τελευταίο πηλίκο είναι περίπου 1.412.

3. (i) Το άθροισμα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $\exp(\beta)$ είναι $\Gamma(n, \beta)$. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 7.2.

(ii), (iii) Θεώρημα 7.1.

4. Έχουμε $p_1 := E(X_1) = 1$ (γιατί?). Έπειτα λύνουμε την (1) της σελ. 197. Χρήσιμη για τους υπολογισμούς εδώ είναι η έκφραση

$$M_X(z) = 1 + z + \frac{z^2}{1 - z}.$$

5. Η ροπογεννήτρια είναι $M_X(r) = (e^r - 1)/r = \sum_{k=0}^{\infty} r^k/(k + 1)!$. Βρίσκουμε $R_2 = -2 + 2\sqrt{1 + 3\theta}$.

6. Θεώρημα 11.3 (σελ. 231). Για το άνω φράγμα αρκεί το $U(T) < 0$. Για το κάτω το ότι $U(T) \geq -1$ (γιατί?) και $R_2 \geq R$.

7. Σελίδα 203, σχέση (1). Προκύπτει ότι και η L_1 έχει κατανομή $\exp(\beta)$.