Θεωρία Κινδύνου ΜΑΠ

Εξετάσεις 7 Ιουνίου 2010

1. (α) Δίνεται κίνδυνος X με εκθετική κατανομή με παράμετρο 2. Για δεδομένα $p, \varepsilon \in (0,1)$, να υπολογιστεί το ασφάλιστρο βασισμένο στην αρχή της μέγιστης απώλειας.

(β) Απο τις παρακάτω συναρτήσεις, ποιές είναι συναρτήσεις ωφελιμότητας και ποιες αντιστοιχούν σε κινδυνόφοβο άτομο? Ως πεδίο ορισμού για καθεμία θεωρούμε το $(0, \infty)$.

$$\sqrt{x+10},\ -\sqrt{x},\ -1/x^4,\ (x+5)^3,\ (x-7)^2,\ e^x,\ \log(x^3+x).$$

2. Άτομο με περιουσία w και συνάρτηση ωφέλειας $u(x) = -e^{-2x}$ έχει δικαίωμα σε κέρδος X το οποίο ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Ποιό είναι το ελάχιστο ποσό που το άτομο δέχεται να λάβει ώστε να παραχωρήσει μισό απο το κέρδος X?

3. Θεωρούμε άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \sqrt{x}$ και περιουσία $w = 1$. Ο κίνδυνος X έχει ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

(α) Για ποιά αναλογική ασφάλιση $I^\lambda(X) = \lambda X$ και ασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας $I_{x_1}(X) = (X - x_1)^+$ έχουμε $E(I^\lambda(X)) = E(I_{x_1}(X)) = 1/8$?

(β) Πόσο είναι το μέγιστο τίμημα G^λ που προτίθεται να πληρώσει το άτομο για να αγοράσει την ασφάλιση $I^\lambda(X)$ απο το ερωτήματος (α)?

(γ) Πόσο είναι το μέγιστο τίμημα G_{x_1} που προτίθεται να πληρώσει το άτομο για να αγοράσει την ασφάλιση $I_{x_1}(X)$ του ερωτήματος (α)?

4. Δίνεται χαρτοφυλάκιο $n = 10^4$ ανεξάρτητων κινδύνων καθένας απο τους οποίους ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 5$ και πραγματοποιείται με πιθανότητα $q = 0.01$. Έστω S το σύνολο των ζημιών. Να βρεθούν

(α) Η μέση τιμή και διασπορά του S.

(β) Προσεγγιστικά, το ελάχιστο περιθώριο ασφαλείας θ ώστε $P(S > (1+\theta)E(S)) \leq 0.05$.

Για τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής δίνεται ότι $\Phi(-1.65) = 0.05$, $\Phi(1.65) = 0.95$.

5. Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος με περιθώριο ασφάλειας θ και ζημιές $\{X_i : i \geq 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με πυκνότητα $f(x) = 2x$ για $x \in [0,1]$ και $f(x) = 0$ αλλού, οι οποίες συμβαίνουν με βάση μια ομογενή διαδικασία Poisson με παράμετρο $m = 3$.

(α) Ποιά είναι η ροπογεννήτρια της X_1?

(β) Να δειχθεί ότι ο συντελεστής προσαρμογής για την διαδικασία ικανοποιεί $R < 8\theta/3 =: R'$.

(γ) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ απο αρχικό πλεόνασμα u ικανοποιεί

$$\psi(u) \geq e^{-R'} e^{-uR'}$$

για κάθε $u \geq 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1. (α) Έχουμε $E(X) = 1/2$, και για $x \geq 0$ ισχύει $P(X \geq x) = e^{-2x}$. Άρα

$$\xi_\epsilon = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \geq x) \leq \epsilon\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : e^{-2x} \leq \epsilon\} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{\epsilon},$$

και η τιμή του ασφαλίστρου είναι

$$\pi_{p,\epsilon} = p\frac{1}{2} + (1-p)\frac{1}{2}\log\frac{1}{\epsilon}.$$

(β) Στη λίστα πιο κάτω, η πρώτη απάντηση λέει αν η δεδομένη συνάρτηση είναι συνάρτηση ωφελιμότητας, και η δεύτερη αν επιπλέον αντιστοιχεί σε κινδυνόφοβο άτομο.

$\sqrt{x+10}$	Ναι, Ναι.	
$-\sqrt{x}$	Όχι.	Είναι φθίνουσα
$-1/x^4$	Ναι, Ναι.	
$(x+5)^3$	Ναι, Όχι.	Δεν είναι κοίλη
$(x-7)^2$	Όχι.	Είναι φθίνουσα στο $[0,7]$,
e^x	Ναι, Όχι.	Δεν είναι κοίλη
$\log(x^3+x)$	Ναι, Ναι.	

ΘΕΜΑ 2. Με βάση την αρχή της ωφελιμότητας, το ζητούμενο ποσό, $K_{\min}$, ικανοποιεί

$$E\{u(w+X)\} = E\left\{u\left(w + K_{\min} + \frac{X}{2}\right)\right\},$$

η οποία γράφεται

$$-\int_0^\infty e^{-2(w+x)}e^{-x}\,dx = -\int_0^\infty e^{-2(w+K_{\min}+x/2)}e^{-x}\,dx.$$

Μετά απο απλοποιήσεις και στοιχειώδεις υπολογισμούς, βρίσκουμε

$$K_{\min} = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.$$

ΘΕΜΑ 3. (α) Το λ ικανοποιεί $E(\lambda X) = 1/8$. Όμως $E(X) = 1/2$, άρα $\lambda = 1/4$.
Ο κίνδυνος X παίρνει τιμές στο $[0,1]$, και για $x_1 \in [0,1]$ έχουμε

$$E(X-x_1)^+ = \int_{x_1}^1 (x-x_1)\,dx = \int_0^{1-x_1} y\,dy = \frac{(1-x_1)^2}{2}.$$

Έπεται ότι $x_1 = 1/2$.

(β) Κατ' αρχάς, υπολογίζουμε τη μέση ωφελιμότητα του ατόμου αν δεν ασφαλιστεί.

$$E\{u(w-X)\} = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \frac{2}{3}. \tag{1}$$

Έπειτα, η μέση ωφελιμότητα αν αγοράσει την αναλογική ασφάλιση του (α) σε τιμή G είναι

$$E\left\{u\left(w - G - \frac{3}{4}X\right)\right\}. \tag{2}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G \leq 1/4$ γιατί για $G > /4$ έχουμε

$$w - G - \frac{3}{4}X < w - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}X \leq w - X.$$

και τότε οι μέσες τιμές στις (1), (2) δεν είναι δυνατόν να είναι ίσες. Έτσι η μέση τιμή στην (2) ισούται με

$$\int_0^1 \sqrt{1 - G - \frac{3}{4}x}\;dx = ... = \frac{8}{9}\left((1-G)^{3/2} - \left(\frac{1}{4} - G\right)^{3/2}\right).$$

Για το μέγιστο G που το άτομο δέχεται να δώσει, η τελευταία ποσότητα πρέπει να ισούται με $2/3$ λόγω της (1). Με χρήση Mathematica βρίσκουμε $G \approx 0.152$.

(γ) Η μέση ωφελιμότητα αν αγοράσει την ασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας του (α) σε τιμή[1] $G \le 1/2$ είναι

$$E\{u(w-G-X\wedge x_1)\} = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1/2-G}\,dx + \int_0^{1/2} \sqrt{1-G-x}\,dx = ...$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-G} + \frac{2}{3}\left((1-G)^{3/2} - \left(\frac{1}{2}-G\right)^{3/2}\right).$$

Θέτοντας αυτό ίσο με 2/3 βρίσκουμε $G \approx 0.167$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Απο το Θεώρημα 6.3 του βιβλίου, έχουμε

$$E(S) = nq\frac{1}{\lambda},\ \mathrm{Var}(S) = nq\frac{1}{\lambda^2} + nq(1-q)\frac{1}{\lambda^2} = nq(2-q)\frac{1}{\lambda^2}.$$

(β) Για το ελάχιστο τέτοιο θ θα έχουμε

$$0.05 = P\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} > \theta\frac{E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\theta\frac{E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right)$$

απο το κεντρικό οριακό θεώρημα. Έπεται ότι

$$\theta\frac{E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \approx 1.65,$$

και άρα

$$\theta \approx 1.65\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{E(S)} = 1.65\frac{\sqrt{2-q}}{\sqrt{nq}} \approx 0.2327.$$

ΘΕΜΑ 5. (α) Για κάθε $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, έχουμε

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^1 2xe^{tx}\,dt = ... = \frac{2}{t^2}(te^t - e^t + 1).$$

Βέβαια, $M_X(0) = 1$.

(β) Η εξίσωση για το συντελεστή προσαρμογής είναι

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_X(r).$$

Η M_X είναι πεπερασμένη στο $\mathbb{R}$, άρα αναπτύσσεται ως δυναμοσειρά

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E(X^k)}{k!}\,t^k$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Κρατώντας μόνο τους όρους με $k \le 2$ στη δυναμοσειρά, παίρνουμε μια υποεκτίμηση $\widetilde{M}_X(t)$ για την $M_X(t)$ για $t > 0$ (γιατί $X \ge 0$). Η θετική λύση της

$$1 + (1+\theta)p_1 r = \widetilde{M}_X(r)$$

είναι μεγαλύτερη απο το συντελεστή προσαρμογής. Αυτό φαίνεται απο το σχήμα της σελ. 197, και είναι εύκολο κανείς να το δικαιολογήσει αυστηρά. Όπως εξηγείται στο βιβλίο, η λύση που βρίσκουμε είναι (σχεση (4), σελ. 198)

$$R' = \frac{2p_1}{p_2}\theta.$$

Για την X υπολογίζουμε

$$p_1 = E(X) = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3},$$
$$p_2 = E(X^2) = \int_0^1 2x^3\,dx = \frac{1}{2},$$

[1] Όπως και στο (β), δείχνουμε ότι το άτομο δεν δέχεται να δώσει $G > 1/2$.

άρα $R' = 8\theta/3$.

(γ) Απο το Θεώρημα 11.3, για $u \geq 0$, η ψ ικανοποιεί τη σχέση

$$\psi(u) = \frac{1}{E(e^{-RU(T)} \,|\, T < \infty)}\ e^{-Ru}.$$

Επειδή κάθε ζημιά έχει μέγεθος το πολύ 1, κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας θα ισχύει $U(T) \geq -1$. Άρα ο παρονομαστής είναι το πολύ e^R. Οπότε έχουμε

$$\psi(u) \geq e^{-R(u+1)} > e^{-R'(u+1)}.$$

Η τελευταία ανισότητα έπεται γιατί $R' > R > 0$ και $1 + u > 0$.