Σημειώσεις στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών

Διαλέξεις Αριστείδη Κοντογεώργη

Επιμέλεια : Βουτσαδάκης Δημήτριος - Μπιζάνος Κωνσταντίνος

6 Μαΐου 2024

Περιεχόμενα

1 Μάθημα 01

1.1 Κίνητρο και Εισαγωγή

Κίνητρο 1. Το κίνητρο για την ανάπτυξη της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών ήταν η επίλυση διοφαντικών εξισώσεων της μορφής $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, όπου $f(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ και $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. Ειδικότερα, η εύρεση ακέραιων λύσεων της διοφαντικής εξίσωσης

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε τη διοφαντική εξίσωση $y^3 = x^2 - 16$ (ελλειπτική καμπύλη) και αναζητούμε τις ακέραιες λύσεις της. Έχουμε ότι $y^3 = x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$. Έστω $d = (x-4, x+4)$ και αφού $d|x-4$ και $d|x+4$ έχουμε ότι $d|8$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Υποθέτουμε ότι x είναι περιττός. Τότε, προκύπτει ότι $d = 1$.

  Θέωρημα 1 (Θεώρημα Μονοσήμαντης Ανάλυσης)**.** Αν a, b, c θετικοί ακέραιοι με $(b, c) = 1$ και $a^n = bc$ για κάποιο φυσικό αριθμό $n > 1$, τότε υπάρχουν ακέραιοι a_1, a_2 πρώτοι μεταξύ τους ώστε $a = a_1 a_2$ και $b = a_1^n$ και $c = a_2^n$.

  Από το Θεώρημα 1, προκύπτει ότι υπάρχουν a, b στο $\mathbb{Z}$ ώστε $x - 4 = a^3$ και $x + 4 = b^3$ με $(a, b) = 1$. Συνεπώς, έχουμε ότι $b^3 - a^3 = (b-a) \cdot m = 8$. Εξετάζοντας περιπτώσεις για το $b - a$ καταλήγουμε ότι η τελευταία σχέση είναι αδύνατη.

- – Αν x είναι άρτιος, τότε $2|x-4, x+4$, συνεπώς $8|y^3$. Επομένως, $8|y^3 + 16 = x^2$ άρα προκύπτει ότι $4|x$ με $x = 4x_1$. Επίσης, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι $y = 4y_1$, άρα η αρχική εξίσωση γράφεται ως εξής : $x_1^2 = 4y_1^3 + 1$, άρα x_1 είναι περιττός.
  – Άρα, $x_1 = 2m + 1$ και προκύπτει ότι $m^2 + m = m(m+1) = y_1^2$. Από το Θεώρημα 1, έχουμε ότι δύο διαδοχικοί αριθμοί είναι κύβοι και αυτό μπορεί να συμβαίνει αν και μόνο αν $m \in \{-1, 0\}$. Συνεπώς, έχουμε ότι οι μοναδικές λύσεις της εξίσωσης είναι οι $(x, y) = (\pm 4, 0)$.

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την διοφαντική εξίσωση $y^3 = x^2 + 1$ και αναζητούμε ακέραιες λύσεις της. Στο $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ έχουμε ότι $y^3 = (x - i)(x + i)$. Στο $\mathbb{Z}[i]$ ορίζεται νόρμα

$$N(a + bi) = a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi)$$

και αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι $E(\mathbb{Z}[i]) = \{\pm 1, \pm i\}$, όπου $E(\mathbb{Z}[i])$ η πολλαπλασιαστική ομάδα αντιστρεψίμων του $\mathbb{Z}[i]$. Γενικότερα, σε ένα δακτύλιο με μονάδα, το σύνολο $R \setminus \{0\}$ δεν είναι ομάδα, όμως το σύνολο $E(R)$ των αντιστρέψιμων στοιχείων του R αποκτά δομή ομάδας με τον πολλαπλασιασμό του R.

Ορισμός 1. Έστω R ακέραια περιοχή. Ένα $a \in R$ με $a \neq 0$ θα λέγεται **ανάγωγο** αν οποτεδήποτε $a = bc$, για κάποια $b, c \in R$, τότε $b \in E(R)$ ή $c \in E(R)$.

Παράδειγμα 3. Τα $-7 = (-1) \cdot 7$ και $7 = (-1) \cdot (-7)$ στο $\mathbb{Z}$ είναι ανάγωγα.

Ορισμός 2. Έστω R περιοχή. Ένα $p \in R$ με $p \neq 0$ και $p \notin E(R)$ θα λέγεται **πρώτο** αν οποτεδήποτε $p|ab$, τότε $p|a$ ή $p|b$.

Παράδειγμα 4. Στο $\mathbb{Z}$ η έννοια του πρώτου και του ανάγωγου στοιχείου ταυτίζονται.

Παράδειγμα 5. Στο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ορίζουμε νόρμα

$$N\left(a + b\sqrt{-5}\right) = \left(a + b\sqrt{-5}\right)\left(a - b\sqrt{-5}\right) = a^2 + 5b^2$$

αποδεικνύεται ότι $E(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. Παρατηρούμε ότι το $2 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ είναι ανάγωγο (γιατί ;) παρόλα αυτά δεν είναι πρώτο, αφού $2|6 = \left(1 - \sqrt{-5}\right)\left(1 + \sqrt{-5}\right)$ όμως $2 \not| \left(1 \pm \sqrt{-5}\right)$.

Ορισμός 3. Έστω R περιοχή. Μια απεικόνιση $\varphi \colon R \to \mathbb{Z}$, η οποία ικανοποιεί τα εξής :

(α) $\varphi(a) \leq \varphi(ab)$, για κάθε $a, b \in R \setminus \{0\}$

(β) για κάθε $a, b \in R$ με $b \neq 0$, υπάρχουν π, υ ώστε $a = b \cdot \pi + \upsilon$ με $\upsilon = 0$ ή $\varphi(\upsilon) < \varphi(b)$.

λέγεται **ευκλείδεια συνάρτηση**. Τότε το ζεύγος (R, φ) λέγεται **ευκλείδεια περιοχή**.

Παράδειγμα 6. Τα ακόλουθα ζεύγη ορίζουν ευκλείδειες περιοχές.

(α) $(\mathbb{Z}[i], \varphi)$ με $\varphi(a + bi) = a^2 + b^2$.

(β) $\left(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \varphi\right)$ με $\varphi\left(a + b\sqrt{-2}\right) = a^2 + 2b^2$

(γ) Έστω k σώμα. Τότε, το ζεύγος $(k[x], \varphi)$, όπου

$$\varphi\left(f(x)\right) = \begin{cases} \deg f, & \text{αν } f(x) \neq 0 \\ -1, & \text{αν } f(x) = 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση 1. Σε πλήρη αντιστοιχεία με την περίπτωση των ακεραίων αριθμών, μπορεί να αποδειχθεί ότι σε κάθε ευκλείδεια περιοχή, η έννοια αναγώγου και πρώτου στοιχείο ταυτίζονται.

Παρατήρηση 2. Επειδή κάθε ευκλείδεια περιοχή είναι και περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης σε συνδυασμό με την ύπαρξη 'ευκλείδειας διαίρεσης', κληρονομούνται από τους ακέραιους αριθμούς, με φυσιολογικό τρόπο, έννοιες όπως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Συνεχίζοντας στο Παράδειγμα 2 ας προσπαθήσουμε να επιλύσουμε την διοφαντική εξίσωση $y^3 = x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$. Παρατηρούμε ότι ο $d = \mu.κ.δ.(x - i, x + i)$ πρέπει να ικανοποιεί ότι $d|2$ (γιατί ;).

Ορισμός 4. Έστω R δακτύλιος και $a, b \in R$. Τα a, b θα λέγονται **ισοδύναμα** (ή **συντροφικά)** αν $a = ub$, για κάποιο $u \in E(R)$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε με $a \cong b$.

- Θα δείξουμε ότι $d \cong 1$. Πράγματι, αν $d \ncong 1$, τότε $d \cong 2$ (με επιχείρημα νορμών) και τότε $d \cong 2 = (1+i)^2 i$. Όμως, $1 + i$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}[i]$, συνεπώς $1 + i|d$, άρα $1 + i|x - i$. Παιρνώντας σε νόρμες προκύπτει ότι $2|x^2 + 1 = y^3$, άρα $2|y^3$, συνεπώς $8|y^3 = x^2 + 1$. Επομένως, $x^2 \equiv -1 \mod 8$, όπου καταλήγουμε σε άτοπο (γιατί ;).

- Παρατηρήστε ότι $E(\mathbb{Z}[i]) = \langle i \rangle$ κυκλική τάξης 4. Από τη μονοσήμαντη ανάλυση έχουμε ότι $x + i = e\zeta^3$ όπου $e \in E(R)$. Αφού η απεικόνιση $E(\mathbb{Z}[i]) \to E(\mathbb{Z}[i])$ με $a \mapsto a^3$ είναι αυτομορφισμός ομάδων, μπορούμε να γράψουμε το e ως $e = e_1^3$ και άρα

$$x + i = (e_1\zeta)^3 = h^3 = (a + bi)^3$$

για κάποια $a, b \in \mathbb{Z}$. Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη συμπεραίνουμε ότι η λύση της αρχικής εξίσωσης είναι $(x, y) = (0, 1)$.

Παράδειγμα 7. Θεωρούμε την διοφαντική εξίσωση $2y^3 = x^2 + 5$. Αν αναχθούμε στο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ παρατηρούμε ότι $2y^3 = x^2 + 5 = (x + \sqrt{-5})(x - \sqrt{-5})$. Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι το 2 είναι ανάγωγο στοιχείο στο $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

"Συνεπώς" (;), κοιτώντας την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι $2|(x+\sqrt{-5})$ ή $2|(x-\sqrt{-5})$. Άρα,

$$\frac{x + \sqrt{-5}}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$$

ή

$$\frac{x - \sqrt{-5}}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-5} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$$

και προφανώς καταλήγουμε σε άτοπο. Παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι τα $(x, y) = (\pm 7, 3)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης. Ποιο ακριβώς ήταν το λάθος στο συλλογισμό μας ; Το λάθος μας βρίσκεται στο "Συνεπώς" όπου υποθέσαμε λανθασμένα ότι αφού το 2 είναι ανάγωγο, τότε το 2 πρέπει να είναι και πρώτο!

- Επιστρέφοντας στο αρχικό πρόβλημα της Εικασίας του Fermat, είναι σχετικά εύκολο να δούμε ότι για να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $x^n + y^n = z^n$ για τυχαίο $n \geq 1$, αρκεί να τις βρούμε για κάποιον p πρώτο.
- Η εξίσωση $t^p - 1 = 0$ έχει ρίζες τις ζ_p^i δηλαδή :

$$t^p - 1 = (t-1)(t-\zeta_p)\cdots\left(t-\zeta_p^{p-1}\right)$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$z^p = x^p + y^p = \prod_{n=0}^{p-1}(x + \zeta_p^n y)$$

Κάνοντας τη παρανόηση (όπως πριν) ότι στον $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ οι έννοιες του αναγώγου και πρώτου στοιχείου ταυτίζονται , μπορεί κανείς να 'αποδείξει' την εικασία του Fermat (όπως έγινε από τον Kummer το 1837, ο οποίος δέχθηκε ότι όλοι οι $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ είναι περιοχές μονοσήμαντης ανάλυσης). Παρόλα αυτά αυτό δεν ισχύει για παράδειγμα $p = 37$.

Κίνητρο 2. Ένα ερώτημα που θα μας απασχολήσει στο μάθημα είναι το πότε υπάρχει μονοσήμαντη ανάλυση και τι κάνουμε στην περίπτωση που δεν υπάρχει.

1.2 Ακέραιοι Αλγεβρικοί Αριθμοί

Ορισμός 5. Ένας $a \in \mathbb{C}$ θα λέγεται **αλγεβρικός αριθμός** αν είναι ρίζα ενός μονικού πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ με $f(x) \neq 0$.

Ορισμός 6. Ένας $a \in \mathbb{C}$ θα λέγεται **ακέραιος αλγεβρικός αριθμός** αν είναι ρίζα ενός μονικού πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ με $f(x) \neq 0$.

Παρατήρηση 3. Ένας $a \in \mathbb{Q}$ είναι ακέραιος αλγεβρικός αν και μόνο αν $a \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι άμεση. Για τη δεύτερη δείξτε ένα γενικότερο αποτέλεσμα και καταλήξτε στο ζητούμενο. Αν $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ με $(m,n) = 1$ ρίζα του $f(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, τότε $m|a_0$ και $n|a_k$. □

Πρόταση 1. Ο $a \in \mathbb{C}$ είναι ακέραιος αλγεβρικός αν και μόνο αν η προσθετική ομάδα $\mathbb{Z}[a] = \{f(a) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

Συμβολισμός 1. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A} = \left\{a \in \overline{\mathbb{Q}} \mid a \text{ ακέραιος αλγεβρικός}\right\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι ο a είναι ακέραιος αλγεβρικός αριθμός. Συνεπώς, υπάρχει $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ βαθμού n, μονικό ώστε $f(a) = 0$. Έστω $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Τότε, αφού $f(x)$ μονικό, υπάρχουν $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ώστε $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ με $r(x) = 0$ ή $\deg(r(x)) < n$. Έτσι έχουμε ότι $g(a) = r(a)$ και είναι σαφές ότι η $\mathbb{Z}[a]$ παράγεται από τα $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $z_1, \ldots, z_n$ παράγουν του $\mathbb{Z}[a]$. Τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, υπάρχουν λ_j^i ώστε $az_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i z_j$. Παρατηρήστε ότι η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής

$$\left[aI_n - \left(\lambda_j^i\right)_{i,j}\right] \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0.$$

Αφού το σύστημα $\left[aI_n - \left(\lambda_j^i\right)_{i,j}\right] X = 0$ έχει μη μηδενική λύση, τότε

$$f(a) = \det\left[aI_n - \left(\lambda_j^i\right)_{i,j}\right] = 0$$

όπου $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ μονικό. □

2 Μάθημα 02

Υπενθύμιση 1. Μια αλγεβρική επέκταση $F \subseteq K$ θα λέγεται **διαχωρίσιμη** αν για κάθε $a \in K$, το ελάχιστο πολυώνυμο $p(x) = \mathrm{Irr}(a, F)$ είναι διαχωρίσιμο, δηλαδή έχει όλες τις ρίζες του διακεκριμένες στην αλγεβρική θήκη $\overline{F}$.

Υπενθύμιση 2. Αποδεικνύεται ότι κάθε ανάγωγο πολυώνυμο πάνω από σώμα χαρακτηριστικής 0 είναι διαχωρίσιμο. Συνεπώς, κάθε αλγεβρική επέκταση $\mathbb{Q} \subseteq K$ είναι διαχωρίσιμη.

Ορισμός 7. Μια επέκταση σωμάτων $F \subseteq K$ θα λέγεται **απλή** αν $K = F(\vartheta)$ για κάποιο $\vartheta \in K$.

Υπενθύμιση 3 (Θεώρημα Πρωταρχικού Στοιχείου)**.** Αν $F \subseteq K$ μια πεπερασμένη επέκταση με $\mathrm{char}F = 0$, τότε υπάρχει $\vartheta \in K$ ώστε $K = F(\vartheta)$.

Θεωρούμε πεπερασμένη επέκταση $\mathbb{Q} \subseteq K$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι η επέκταση αυτή είναι διαχωρίσιμη και απλή, δηλαδή $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{O}_K$ του ακέραιους αλγεβρικούς αριθμούς του K.

Παρατήρηση 4. Αν $a \in \overline{\mathbb{Q}}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $ma \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Έστω $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ τέτοιο ώστε $f(a) = 0$. Τότε, υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $ma_i \in \mathbb{Z}$, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $g(x) = x^n + ma_{n-1}x^{n-1} + \cdots + m^{n-1}a_1x + m^na_0 \in \mathbb{Z}$. Παρατηρήστε ότι $g(ma) = 0$. □

Από την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$, όπου $\vartheta \in \mathcal{O}_K$ (γιατί ;).

2.1 Τετραγωνικά Σώματα Αριθμών

Ορισμός 8. Έστω $\mathbb{Q} \subseteq K$ πεπερασμένη επέκταση. Αν $[K : \mathbb{Q}] = 2$, τότε το K θα λέγεται **τετραγωνικό σώμα αριθμών**.

Όπως πριν αν $\mathbb{Q} \subseteq K$ με $[K : \mathbb{Q}] = 2$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$, όπου $\vartheta \in \mathcal{O}_K$.

- Τότε, έχουμε ότι $\deg \mathrm{Irr}(a, \mathbb{Q}) = 2$, συνεπώς ισχύει ότι

$$p(x) = \mathrm{Irr}(\vartheta, \mathbb{Q}) = x^2 - ax - b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - b$$

- Αν $\vartheta^* = \vartheta - \frac{a}{2}$ παρατηρήστε ότι ϑ^* είναι ρίζα του $x^2 - b'$, όπου $b' = a^2/4 + b$ και μάλιστα

$$\mathbb{Q}(\vartheta) = \mathbb{Q}(\vartheta^*)$$

Ορισμός 9. Ένας $b \in \mathbb{Z}$ καλείται **ελεύθερος τετραγώνου**, αν δεν υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$ ώστε $a^2 | b$. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $\square \not| b$.

- Αρχικά παρατηρούμε ότι b' δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο, διότι στην περίπτωση αυτή θα ήταν της μορφής $b' = r^2$ με $r \in \mathbb{Q}$, επομένως αφού ϑ^* ρίζα του $x^2 - b'$, τότε $\vartheta \in \mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}(\vartheta) = \mathbb{Q}$. Τότε μπορούμε να γράψουμε $b' = mr^2$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ ελεύθερο τετραγώνου και $r \in \mathbb{Q}$. Παρατηρήστε ότι

$$K = \mathbb{Q}(\vartheta) = \mathbb{Q}(\vartheta^*) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{b'}\right) = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$$

Όλη η προηγούμενη διαδικασία συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θέωρημα 2. Κάθε τετραγωνικό σώμα αριθμών K είναι της μορφής $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 1$ ελεύθερος τετραγώνου.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις :

- Αν $m > 0$, τότε $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \subseteq \mathbb{R}$ και λέγεται **πραγματικό τετραγωνικό σώμα αριθμών**.
- Αν $m < 0$, τότε $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \subseteq \mathbb{C}$ και λέγεται **μιγαδικό τετραγωνικό πραγματικό σώμα αριθμών**.

Ορισμός 10. Μια επέκταση σωμάτων $F \subseteq K$ λέγεται **κανονική** αν κάθε $p(x) \in F[x]$ το οποίο έχει ρίζα στο K, αναλύεται πλήρως στο K.

Πόρισμα 1. Αν $F \subseteq K$ επέκταση σωμάτων, τότε K είναι κανονική και πεπερασμένη αν και μόνο αν K είναι σώμα ριζών κάποιου πολυωνύμου πάνω από το F.

Παρατήρηση 5. Παρατηρήστε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \subseteq K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ είναι κανονική (αφού είναι σώμα ριζών του $x^2 - m$) και διαχωρίσιμη, άρα είναι επέκταση Galois. Η αντίστοιχη ομάδα Galois αυτής της επέκτασης είναι η $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma\}$ με $\sigma \colon K \to K$ και $\sigma(\sqrt{m}) = -\sqrt{m}$ και $\sigma(a) = a$, για κάθε $a \in \mathbb{Q}$. Τέλος, παρατηρήστε ότι αν $p(x) \in F[x]$ και $a \in K$ ρίζα του $p(x)$, τότε και $\sigma(a)$ ρίζα του $p(x)$.

Ορισμός 11. Αν $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, τότε για κάθε $c = a + b\sqrt{m} \in K$ ορίζεται

- το **ίχνος** του c με $S_K(c) = c + \sigma(c) = 2a$
- και η **νόρμα** του c με $N_K(c) = c \cdot \sigma(c) = a^2 - mb^2$.

Τότε, ισχύει ότι

$$\mathrm{Irr}(c, \mathbb{Q}) = (x - c)(x - \sigma(c)) = x^2 - S_K(c)x + N_K(c) \tag{2}$$

Κίνητρο 3. Σκοπός μας είναι να βρούμε ένα "ικανοποιητικό κριτήριο" με σκοπό την εύρεση των ακέραιων αλγεβρικών αριθμών του K.

Θέωρημα 3. Ένας $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ είναι ακέραιος αλγεβρικός αν και αν μόνο αν $S_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$ και $N_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Αν $\alpha = a + b\sqrt{m}$, τότε θέτουμε $c = 2a$ και $d = 2b$. Τότε $S_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$ και $N_K(\alpha) \in \mathbb{Z}$ αν και μόνο αν $c \in \mathbb{Z}$ και

$$a^2 - mb^2 = \frac{c^2 - md^2}{4} \in \mathbb{Z}$$

Αφού m είναι ελεύθερο τετραγώνου, οι αρχικές μας απαιτήσεις ισοδυναμούν με το $c, d \in \mathbb{Z}$ και $c^2 \equiv md^2 \mod 4$. Αρχικά παρατηρούμε ότι $x^2 \equiv 0, 1 \mod 4$, για κάθε $x \in \mathbb{Z}$. Επίσης έχουμε ότι $m \equiv 1, 2, 3 \mod 4$, επομένως διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν $m \equiv 2, 3 \mod 4$, τότε έχουμε ότι $c^2 \equiv d^2 \equiv 0 \mod 4$. Τότε, προκύπτει ότι $c \equiv d \equiv 0 \mod 2$, άρα $\alpha = \frac{c-d}{2} + d\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$.
- Αν $m \equiv 1 \mod 4$, τότε έχουμε ότι $c^2 \equiv d^2 \mod 4$. Τότε, προκύπτει ότι $c \equiv d \mod 2$, άρα $\alpha = \frac{c-d}{2} + d\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$.

Από τις τελευταίες δύο σχέσεις έχουμε ότι α είναι ακέραιος αλγεβρικός ως άθροισμα τέτοιων. □

Β΄ Τρόπος. Η μία κατεύθυνση είναι άμεση από την σχέση 2. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι α είναι ακέραιος αλγεβρικός, άρα υπάρχει $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ώστε $f(\alpha) = 0$.

- Τότε, υπάρχει $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ μονικό, θετικού βαθμού ώστε $f(x) = q(x) \cdot \mathrm{Irr}(a, \mathbb{Q})$.
- Τότε, βλέπε Θεωρία Galois, μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ώστε $f(x) = a(x)b(x)$ και $a(x) = c_1 q(x)$, $b(x) = c_2 \mathrm{Irr}(a, \mathbb{Q})$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$.

- Αφού $f(x), q(x), \mathrm{Irr}(a, \mathbb{Q})$ είναι μονικά, τότε έχουμε ότι $b(x) = \mathrm{Irr}(a, \mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}[x]$ και από την σχέση 2 έχουμε το ζητούμενο.

□

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{m}], & \text{αν } m \equiv 2,3 \mod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right], & \text{αν } m \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

2.2 Η ομάδα των μονάδων

Σκοπός είναι να βρούμε τις μονάδες (αντιστρέψιμα στοιχεία) του $\mathcal{O}_K$. Για κάθε $\varepsilon \in \mathcal{O}_K$ έχουμε ότι $N_K(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ και μάλιστα αποδεικνύεται εύκολα ότι $\varepsilon \in E[\mathcal{O}_K]$ αν και μόνο αν $N(\varepsilon) \in \{-1, 1\}$. Συμβολίζουμε με

$$\omega_m = \begin{cases} \sqrt{m}, & m \equiv 2,3 \mod 4 \\ \frac{1+\sqrt{m}}{2}, & \text{αν } m \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

Συνεπώς, αν $\varepsilon = a + b\omega_n$ με $a, b \in \mathbb{Z}$ αντιστρέψιμο, τότε έχουμε ότι

$$N_K(\varepsilon) = \begin{cases} a^2 - mb^2, & m \equiv 2,3 \mod 4 \\ a^2 + ab + \frac{1-m}{4}b^2, & \text{αν } m \equiv 1 \mod 4 \end{cases} = \pm 1.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

(α) Υποθέτουμε ότι $m < 0$.

- Αν $m \equiv 2,3 \mod 4$, τότε $a^2 + |m|b^2 = 1$.
  - Αν $|m| > 1$, τότε έχουμε ότι $a = \pm 1$ και $b = 0$, άρα $\varepsilon = \pm 1$.
  - Αν $m = -1$, τότε $a^2 + b^2 = 1$, συνεπώς έχουμε τέσσερεις λύσεις $a = \pm 1$ και $b = 0$ και $a = 0$ και $b = \pm 1$. Δηλαδή $\varepsilon = \pm 1$ ή $\pm i$
- Αν $m \equiv 1 \mod 4$, έχουμε ότι

$$a^2 + ab + \frac{1-m}{4}b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{|m|}{4}b^2 = 1.$$

  - Αν $|m| > 4$, τότε όμοια έχουμε ότι $b = 0$ και $a = \pm 1$.

- Αν $|m| \leq 4$ και $m \equiv 1$, τότε $m = -3$. Παρατηρήστε ότι για $|b| \geq 2$ δεν υπάρχουν λύσεις. Για $b = 1$, προκύπτει ότι $a^2 + a + 1 = 1$, άρα $a = 0$ ή $a = -1$. Τέλος, αν $b = 0$, έχουμε ότι $a = \pm 1$ και για $b = -1$ έχουμε $a = 0$.

(β) Η περίπτωση $m > 0$ παραλείπεται. (Βλέπε Αντωνιάδης, Κοντογεώργης (2022) ″ Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών ″)

3 Μάθημα 03

3.1 Ιδεώδη Σώματος Κλασμάτων και Δακτύλιοι Dedekind

Έστω R ακέραια περιοχή και $K = \mathrm{Quot}(R)$ το σώμα πηλίκων του R.

Ορισμός 12. Ένα $A \subseteq K$ λέγεται **ιδεώδες** του K αν ισχύουν τα ακόλουθα :

(α) $a_1 - a_2 \in A$, για κάθε $a_1, a_2 \in A$

(β) $\lambda a \in A$, για κάθε $\lambda \in R$ και $a \in A$.

(γ) $A \neq \{0_K\}$

(δ) υπάρχει $\delta \in K$ ώστε $\delta A \subseteq R$.

Αν $A \subseteq R$ τότε το A θα λέγεται **ακέραιο** ιδεώδες, αλλιώς θα λέγεται **κλασματικό**.

Παράδειγμα 8. Κάθε μη μηδενικό ιδεώδες I του R, αφού $I \subseteq R \subseteq K$, είναι άμεσο ότι είναι ιδεώδες του K για $\delta = 1$.

Παράδειγμα 9. Αν $R = \mathbb{Z}$ και $K = \mathbb{Q}$, τότε $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$ είναι κλασματικό ιδεώδες του K, για $\delta = 3$.

Ορισμός 13. Αν A, B ιδεώδη του K, τότε ορίζεται το **γινόμενό** τους

$$A \cdot B = \left\{ \sum_{i \in I,\ I \text{ πεπερασμένο}} a_i b_i \mid a_i \in A,\ b_i \in B \right\} \tag{3}$$

Παρατήρηση 6. Δείξτε ότι $A \cdot B$ είναι πράγματι ιδεώδες του K.

Πρόταση 2 (Ιδιότητες Ιδεωδών)**.** Έστω A, B, C ιδεώδη του $K = \mathrm{Quot}(R)$. Τότε ισχύει ότι :

(α) $A \cdot B = B \cdot A$

(β) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

(γ) $A \cdot R = R \cdot A = A$

Παρατήρηση 7. Το σύνολο των ιδεωδών του K εφοδιασμένο με πράξη το γινόμενο ιδεωδών είναι μια μεταθετική ημιομάδα με μονάδα (ή αλλιώς μονοϊδές).

Ορισμός 14. Αν A είναι ένα ιδεώδες του K, ορίζουμε ως **ανάστροφο ιδεώδες** του A

$$A^* = \{x \in K \mid xA \subseteq R\}$$

Παράδειγμα 10. Έστω $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$ και $A = 3\mathbb{Z}$. Τότε, $A^* = \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ και $A \cdot A^* = \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 8 (Ιδιότητες Ανάστροφου Ιδεώδους)**.** (α) Αν A_1, A_2 ιδεώδη του K με $A_1 \subseteq A_2$, τότε $A_2^* \subseteq A_1^*$.

(β) Αν A ιδεώδες του K, τότε $A^* \cdot A \subseteq R$. Η ισότητα δεν ισχύει εν γένει!

Απόδειξη. Άσκηση. □

Παρατήρηση 9. Έστω A ιδεώδες του K και υποθέτουμε ότι A έχει αντίστροφο, δηλαδή υπάρχει B ιδεώδες του K ώστε $A \cdot B = R$. Είναι άμεσο ότι $B \subseteq A^*$. Επιπρόσθετα, ισχύει ότι

$$A^* = A^* \cdot R = (A^* \cdot A) \cdot B \subseteq B.$$

Έτσι προκύπτει ότι $B = A^*$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{I} = \{A \mid A \text{ ιδεώδες του } K\}$.

Λήμμα 1. Κάθε κύριο ιδεώδες aR με $a \in K \setminus \{0\}$ είναι αντιστρέψιμο. Συνεπώς το σύνολο

$$\mathcal{H} = \{aR \mid a \in K \setminus \{0\}\}$$

είναι πολλαπλασιαστική, αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. Έστω $a \neq 0$ στο K. Παρατηρήστε ότι $aR \cdot \left(a^{-1}R\right) = R$. □

Πρόταση 3. Το $\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{I} \mid A \text{ είναι αντιστρέψιμο}\}$ είναι πολλαπλασιαστική, αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι αν $A_1, A_2 \in \mathcal{J}$, τότε και το $A_1 \cdot A_2 \in \mathcal{J}$ και μάλιστα

$$(A_1 \cdot A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1} = A_2^* \cdot A_1^*.$$

□

Ορισμός 15. Μια περιοχή R θα λέγεται **δακτύλιος του Dedekind** αν κάθε ιδεώδες του $K = \mathrm{Quot}(R)$ είναι αντιστρέψιμο.

3.2 Δακτύλιοι και Πρότυπα της Noether

Ορισμός 16. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Ο R θα λέγεται **δακτύλιος της Noether** αν ισχύει κάποια από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

(α) Κάθε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών είναι τελικά σταθερή

(β) Κάθε μη κενό σύνολο ιδεωδών του R έχει μεγιστικό στοιχείο (ως προς τη σχέση εγκλεισμού).

(γ) Κάθε ιδεώδες του R είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη Ισοδυναμίας.

- (α) $\to$ (β) Έστω $\mathcal{X} \neq \emptyset$ σύνολο ιδεωδών του R και ιδεώδες $A_0 \in \mathcal{X}$. Έστω ότι $\mathcal{X}$ δεν έχει μεγιστικό στοιχείο.
  - Τότε, υπάρχει κάποιο $A_0 \subsetneqq A_1$ στην $\mathcal{X}$.
  - Το A_1 δεν είναι επίσης μεγιστικό, συνεπώς υπάρχει $A_1 \subsetneqq A_2$ στην $\mathcal{X}$.
  - Συνεχίζοντας την προηγούμενη διαδικασία, κατασκεύαζουμε γνησίως αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών
    $$A_0 \subsetneqq A_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq A_n \subsetneqq A_{n+1} \subsetneqq \cdots$$
    Από το (α) καταλήγουμε σε άτοπο.
- (β) $\to$ (γ) Έστω I ιδεώδες του R και $\mathcal{W}$ το σύνολο των πεπερασμένα παραγόμενων ιδεωδών J με $J \subseteq I$.
  - Αρχικά $\mathcal{W} \neq \emptyset$, αφού $\{0\} \subseteq A$.
  - Από το (β), υπάρχει $J \in \mathcal{W}$ μεγιστικό στοιχείο. Θα δείξουμε ότι $J = I$ και έτσι θα έχουμε το ζητούμενο.
  - Αν $J \subsetneqq I$, τότε υπάρχει $x \in I \setminus J$. Θεωρώντας το ιδεώδες $J' = J + xR$, τότε παρατηρούμε ότι $J \subsetneqq J'$, J' πεπερασμένα παραγόμενο και $J' \subseteqq I$, συνεπώς $J' \in \mathcal{W}$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.
- (γ) $\to$ (α) Θεωρούμε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών του R
  $$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots .$$
  Θα δείξουμε ότι η παραπάνω αλυσίδα είναι τελικά σταθερή.
  - Παρατηρούμε ότι $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ είναι ένας ιδεώδες του R, συνεπώς είναι πεπερασμένα παραγόμενο και της μορφής $I = x_1R + \cdots + x_kR$.
  - Για κάθε $i = j, \ldots, k$, υπάρχει I_{i_j} ώστε $x_j \in I_{i_j}$. και αν $\ell = \max\{i_1, \ldots, i_k\}$ έχουμε ότι $x_1, \ldots, x_k \in I_\ell$.

– Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $I \subseteq I_\ell$, συνεπώς έχουμε ότι $I = I_\ell$ και η παραπάνω αλυδίδα είναι τελικά σταθερή.

□

Παράδειγμα 11. Το $\mathbb{Z}$ είναι δακτύλιος της Noether. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ είναι κύριο, ειδικότερα πεπερασμένα παραγόμενο.

Πόρισμα 2. Κάθε δακτύλιος κύριων ιδεωδών είναι δακτύλιος της Noether.

Ορισμός 17. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και M ένα R - πρότυπο . Το M θα λέγεται **πρότυπο της Noether** αν ισχύει κάποια από τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες.

(α) Κάθε αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M είναι τελικά σταθερή.

(β) Κάθε μη κενή οικογένεια υποπροτύπων του M έχει μέγιστικό στοιχείο (ως προς την σχέση εγκλεισμού).

(γ) Κάθε υποπρότυπο του M είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Απόδειξη. Η απόδειξη της ισοδυναμίας των παραπάνω γίνεται όμοια με αυτή του προηγούμενου ορισμού, συνεπώς αφήνεται ως άσκηση. □

Λήμμα 2. Έστω βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \to M_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} M_2 \to 0$$

Τότε, τα M_1, M_2 είναι πρότυπα της Noether αν και μόνο αν και το M είναι πρότυπο της Noether.

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θέωρημα 4. (α) Το ευθύ άθροισμα πεπερασμένων το πλήθος προτύπων της Noether είναι προτύπο της Noether.

(β) Η ομομορφική εικόνα προτύπου της Noether είναι πρότυπο της Noether.

Απόδειξη. Έστω A, B δύο R - πρότυπα της Noether.

(α) Για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $A \oplus B$ είναι πρότυπο της Noether. Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2, θεωρώντας τη β.α.α.

$$0 \to A \hookrightarrow A \oplus B \xrightarrow{\pi_B} B.$$

(β) Από το Λήμμα 2, είναι άμεσο ότι πηλίκο προτύπου της Noether είναι πρότυπο της Noether. Χρησιμοποιώντας το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών καταλήγουμε στο ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 10. Από την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι τα ευθέα αθροίσματα επάγουν βραχείες ακριβείς ακολουθίες, παρόλα αυτά δεν ισχύει εν γένει το αντίστροφο! [1] Πράγματι, θεωρούμε τη β.α.α. αβελιανών ομάδων

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

Παρατηρήστε ότι η παραπάνω ακολουθία είναι ακριβής, αλλά είναι προφανές ότι $\mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Παρόλα αυτά αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι αν

$$0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$$

β.α.α. μεταξύ k - δ.χ. πεπερασμένης διάστασης, τότε προκύπτει ότι $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$ και συνεπώς $V \cong V_1 \oplus V_2$ (ως εξωτερικό ευθύ άθροισμα) με επιχείρημα διαστάσεων.

[1] Όταν αυτό συμβαίνει η αντίστοιχη β.α.α. λέγεται **διασπώμενη**.

4 Μάθημα 04

4.1 Δακτύλιοι Dedekind και Πρώτα - Μέγιστα Ιδεώδη

Ορισμός 18. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και I γνήσιο ιδεώδες του R.

(α) Το I θα λέγεται **πρώτο** αν οποτεδήποτε $a \cdot b \in I$, τότε $a \in I$ ή $b \in I$, για $a, b \in R$.

(β) Το I λέγεται **μέγιστο** αν για οποιοδήποτε J ιδεώδες του R για το οποίο ισχύει $I \subseteq J \subseteq R$, τότε $J = I$ ή $J = R$.

Πρόταση 4. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος.

- Ένα $\mathfrak{m}$ είναι μέγιστο αν και μόνο αν ο $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα.
- Ένα $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο αν και μόνο αν ο $R/\mathfrak{p}$ είναι ακέραια περιοχή.

Παρατήρηση 11. Κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο, όμως το αντίστροφο δεν ισχύει!

Για παράδειγμα, θεωρούμε $R = \mathbb{Z}[x]$ και $I = xR$, δηλαδή το ιδεώδες που περιέχει όλα τα πολυώνυμα που έχουν ρίζα το 0. Από το συνήθη ομομορφισμό εκτίμησης έχουμε ότι $R/xR \cong \mathbb{Z}$, το οποίο είναι ακέραια περιοχή, αλλά όχι σώμα, δηλαδή το xR είναι πρώτο αλλά όχι μέγιστο.

Παράδειγμα 12. Έστω $R = \mathbb{Z}$ και $I = n\mathbb{Z}$. Γνωρίζουμε ότι ο $R/I = \mathbb{Z}_n$ είναι σώμα αν και μόνο αν ο n είναι πρώτος. Άρα, κάθε μη μηδενικό, πρώτο (και μέγιστο) ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ είναι της μορφής $I = p\mathbb{Z}$, όπου p πρώτος.

Σημείωση 1. Γνωρίζουμε ότι κάθε μη μηδενικό, πρώτο ιδεώδες σε Π.Κ.Ι. είναι μέγιστο. Ας εξασθενίσουμε τις υποθέσεις μας σχετικά με την φύση του δακτυλίου R μπορούμε να πετύχουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα; Αυτό συμβαίνει αν ο δακτύλιος είναι Dedekind.

Λήμμα 3. Έστω $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R και A, B ιδεώδη του R. Αν $A \cdot B \subset \mathfrak{p}$, τότε $A \subseteq \mathfrak{p}$ ή $B \subseteq \mathfrak{p}$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $b \in B$ με $b \notin \mathfrak{p}$. Έστω $a \in A$. Τότε, έχουμε ότι $a \cdot b \in \mathfrak{p}$. Αφού $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο, τότε $a \in \mathfrak{p}$ ή $b \in \mathfrak{p}$. Από την παραπάνω υπόθεση έχουμε ότι $a \in \mathfrak{p}$. □

Θέωρημα 5. Έστω R δακτύλιος Dedekind. Τότε, ισχύουν τα εξής :

(α) Ο R είναι της Noether.

(β) Κάθε μη μηδενικό, πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.

Απόδειξη. (α) Έστω $A \neq \{0\}$ ιδεώδες του R.

- Τότε, υπάρχει ιδεώδες $A^{-1} = A^*$ του $K = \mathrm{Quot}(R)$ ώστε $A \cdot A^{-1} = R$.
- Επομένως, υπάρχουν $a_1, \ldots, a_m \in A$ και $b_1, \ldots, b_m \in A^*$, ώστε

$$1 = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_m.$$

Άρα, για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x = (b_1 x)a_1 + \cdots + (b_m x)a_m$, όπου $b_i x \in R$, από το ορισμό του A^*. Άρα, $A = a_1 R + \cdots + a_m R$.

(β) Έστω $\mathfrak{p}$ πρώτο. Αφού R είναι της Noether, τότε υπάρχει $\mathfrak{m}$ μέγιστο ώστε $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$.

- Αρχικά, έχουμε ότι
$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{-1} = R$$
Άρα, $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}^{-1}$ είναι ιδεώδες του R.
- Έχουμε ότι $\mathfrak{p} = \left(\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}^{-1}\right) \mathfrak{m}$ και από το Λήμμα 3 προκύπτει ότι $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{p}$ ή $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$.
- Αν υποθέσουμε ότι $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq \mathfrak{p}$, τότε παρατηρούμε ότι
$$\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{p}^{-1} \cdot \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}^{-1} \subseteq R.$$
Άρα, έχουμε ότι $R \subseteq \mathfrak{m}$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$ και έχουμε το ζητούμενο.

□

4.2 Ακέραια Εξάρτηση

Ορισμός 19. Έστω R μεταθετικός και $S \subseteq R$ υποδακτύλιος. Ένα $a \in R$ θα λέγεται S - **ακέραιος** αν υπάρχει $f(x) \in S[x]$ μονικό ώστε $f(a) = 0$.

Θέωρημα 6. Έστω $R \subset L$ υποδακτύλιος ενός σώματος L. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Το a είναι R - ακέραιος.

1. Ο δακτύλιος $R[a]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R-πρότυπο.
2. Υπάρχει ένα πεπερασμένα παραγόμενο, μη-μηδενικό R-πρότυπο $M \subset L$ ώστε $aM \subset M$.

Απόδειξη.

- (α) $\to$ (β) Αφού a είναι ένας R - ακέραιος, τότε υπάρχει μονικό $f(x) \in R[x]$, βαθμού n, ώστε $f(a) = 0$. Αφού ο μεγιστοβάθμιος του $f(x)$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R, τότε για κάθε $g(x) \in R[x]$, υπάρχουν $q(x), r(x) \in R[x]$ ώστε $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ με $\deg r(x) < n$ ή $r(x) = 0$. Αφού $g(a) = r(a)$, τότε προκύπτει ότι

$$R[a] = \langle 1, a, \ldots, a^{n-1} \rangle .$$

- (β) $\to$ (α) Άμεσο για $M = R[a]$.
- Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M = z_1R + \cdots + z_rR$, με $z_i \in L$, ώστε $aM \subseteq M$.
  - Τότε, υπάρχει πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ (βλέπε Πρόταση 1) ώστε

$$A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} \Rightarrow (aI_n - A) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με $\operatorname{adj}(aI_n - A)$, τότε προκύπτει ότι

$$\det(aI_n - A) = a^n + \lambda_{n-1}a^{n-1} + \cdots + \lambda_1 a + \lambda_0 = 0.$$

□

Πόρισμα 3. Αν $a_1, \ldots, a_m$ ακέραια πάνω από το R, τότε το $R[a_1, \ldots, a_m]$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R - πρότυπο.

Παρατήρηση 12. Έστω L σώμα και $R \subseteq L$. Το σύνολο

$$R' = \{a \in L \mid a \text{ είναι } R \text{ - ακέραιος}\} \tag{4}$$

είναι υποδακτύλιος του L.

Απόδειξη. Έστω $a, b \in R'$. Από το Θεώρημα 6, προκύπτει ότι υπάρχουν M, N δύο πεπερασμένα παραγόμενα R - πρότυπα, τέτοια ώστε $aM \subseteq M$ και $bN \subseteq N$. Δείξτε ότι $(a-b)MN \subseteq MN$ και $abMN \subseteq MN$. □

Ορισμός 20. Έστω L σώμα και $R \subseteq L$. Ο δακτύλιος R' λέγεται **αλγεβρική θήκη** του R στο L. Στην περίπτωση που $L = \operatorname{Quot}(R)$ και $R' = R$, τότε λέμε ότι R είναι **ακέραια κλειστός**.

Θέωρημα 7. Έστω R ακέραια περιοχή και $R \subseteq K \subseteq L$, όπου K, L σώματα. Αν S είναι η ακέραια θήκη του R στο K, τότε η ακέραια θήκη του S και R στο L συμπίπτουν.

Απόδειξη. Έστω $a \in L$ ώστε να είναι S - ακέραιο. Τότε, υπάρχουν $a_0, \ldots, a_{n-1} \in S$ ώστε

$$a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 = 0$$

Το R - πρότυπο $R_1 = R[a_0, \ldots, a_{n-1}]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Αφού το $R_1[a]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R_1 - πρότυπο, τότε $R_1[a]$ είναι περασμένα παραγόμενο R - πρότυπο. Συνεπώς, a είναι ακέραιο πάνω από το R. Το αντίστροφο έπεται άμεσα. □

Θέωρημα 8. Έστω R ακέραια περιοχή και $R \subseteq L$ με L σώμα. Τότε, R' είναι ακέραια κλειστή.

Πρόταση 5. Κάθε δακτύλιος Dedekind είναι ακέραια κλειστός.

Απόδειξη. Έστω $a \in R'$. Συνεπώς, ο δακτύλιος $R[a]$ είναι ένα π.π. R - πρότυπο, δηλαδή της μορφής $R[a] = z_1 R + \cdots + z_n R$.

- Τότε, υπάρχει $\delta \in R$ ώστε $\delta z_i \in R$, άρα $\delta \cdot R[a] \subseteq R$. Άρα, $R[a]$ είναι ιδεώδες του K.
- Αφού $R[a]$ είναι δακτύλιος, τότε $R[a]^2 = R[a] \cdot R[a] = R[a]$, άρα έχουμε ότι

  $$R[a] = R[a]^{-1} \cdot R[a]^2 = R[a]^{-1} \cdot R[a] = R$$

  άρα έχουμε το ζητούμενο.

□

Συνδυάζοντας τα θεωρήματα 5 και 8 έχουμε το ακολουθο θεώρημα.

Θέωρημα 9. Έστω R δακτύλιος Dedekind. Τότε, ισχύουν τα εξής :

(α) Ο R είναι της Noether.

(β) Κάθε μη μηδενικό, πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.

(γ) Ο R είναι ακέραια κλειστός.

Κίνητρο 4. Είδαμε ότι αν R είναι Dedekind, τότε ικανοποιεί της ιδιότητες (α),(β),(γ). Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι οι ιδιότητες (α),(β),(γ) χαρακτηρίζουν τους δακτύλιους Dedekind.

Λήμμα 4. Έστω R δακτύλιος της Noether και $0 \neq I$ ιδεώδες του R με $I \neq R$. Τότε, υπάρχουν πρώτα ιδεώδη $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ ώστε

$$\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k \subseteq I \subseteq \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k.$$

Απόδειξη. Έστω

$$\mathcal{X} = \{I \mid I \text{ μη μηδενικό, γνήσιο ιδεώδες του } R \text{ που δεν ικανοποιεί τη ζητούμενη συνθήκη}\}.$$

- Έστω, προς άτοπο, ότι $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Αφού R είναι της Noether, τότε η $\mathcal{X}$ έχει μεγιστικό στοιχείο J.
- Αφού $J \in \mathcal{X}$, τότε J δεν είναι πρώτο. Συνεπώς, υπάρχουν $a, b \notin J$ με $ab \in J$.
- Τότε, αν $J_a = J + aR$ και $J_b = J + bR$, τότε $J \subsetneqq J_a$ και $J \subsetneqq J_b$, άρα $J_a, J_b \notin \mathcal{X}$, συνεπώς ισχύει η ζητούμενη ιδιότητα.
- Από το γεγονός ότι $J = J_a \cdot J_b$ καταλήξτε σε άτοπο.

□

5 Μάθημα 05

5.1 Χαρακτηρισμός Δακτυλίων Dedekind

Λήμμα 5. Έστω R περιοχή που ικανοποιεί τα (α),(β),(γ) του Θεωρήματος 9. Τότε, κάθε μη μηδενικό, πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ είναι αντιστρέψιμο.

Απόδειξη.

- Από το Λήμμα 4, για κάθε $a \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$, για το ιδεώδες aR ισχύει ότι υπάρχουν πρώτα $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ ώστε
$$\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k \subseteq aR \subseteq \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k.$$
- Διαλέγουμε $a \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ για το οποίο υπάρχουν πρώτα $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r_0}$ ώστε $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{r_0} \subseteq aR$ και $r_0 \in \mathbb{N}$ να είναι το ελάχιστο δυνατό.
- Από το Λήμμα 3, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}$ και από την ιδιότητα (β) προκύπτει ότι $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$.
- Από την επιλογή του a προκύπτει ότι $\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{r_0} \not\subseteq aR$, συνεπώς υπάρχει $b \in \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{r_0} \setminus aR$. Άρα, έχουμε ότι $b/a \notin R$.
- Όμως, ισχύει ότι $b\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{r_0} \subseteq aR$, άρα έχουμε ότι $(b/a)\mathfrak{p} \subseteq R$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $b/a \in \mathfrak{p}^*$. Αφού $R \subseteq \mathfrak{p}^*$ και $b/a \notin R$ συμπεραίνουμε ότι $R \subsetneq \mathfrak{p}^*$.
- Έχουμε ότι $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R \subseteq \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^* \subseteq R$, όπου $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^*$ είναι ιδεώδες του R.
- Από την ιδιότητα (β), το $\mathfrak{p}$ είναι μέγιστο, συνεπώς έχουμε ότι $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$ ή $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^* = R$. Επομένως, για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποκλείσουμε την περίπτωση $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$.
- Υποθέτουμε ότι $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$. Από την τελευταία σχέση είναι άμεσο ότι $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}^*)^n \mathfrak{p}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $x \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$ και $y \in \mathfrak{p}^* \setminus R$ ισχύει ότι $xy^n \in \mathfrak{p} \subseteq R$.
- Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι για κάθε τέτοια επιλογή x, y έχουμε ότι $xR[y] \subseteq R$. Αφού R είναι της Noether και $xR[y]$ ιδεώδες του προκύπτει ότι $xR[y]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο R - πρότυπο. Μάλιστα από την τελευταία σχέση έχουμε ότι $R[y]$ είναι ένα πεπερασμένα παραγόμενο R - πρότυπο.
- Από το Θεώρημα 6 προκύπτει ότι y είναι ακέραιο πάνω από τον R και αφού R είναι ακέραια κλειστός έχουμε ότι $y \in R$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

□

Λήμμα 6. Έστω R περιοχή που ικανοποιεί τα (α),(β),(γ) του Θεωρήματος 9. Τότε, κάθε μη μηδενικό και γνήσιο ιδεώδες I του R γράφεται ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \{A \mid A \text{ μη μηδενικό, γνήσιο ιδεώδες του } R \text{ που δεν γράφεται σαν γινόμενο πρώτων } \}.$$

Θα υποθέσουμε ότι $\mathcal{A} \neq \emptyset$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

- Αν $\mathcal{A} \neq \emptyset$ επιλέγουμε ότι $A \in \mathcal{A}$ για το οποίο υπάρχουν $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{r_0}$ ώστε $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{r_0} \subseteq A$ και $r_0 \in \mathbb{N}$ να είναι το ελάχιστο δυνατό.
- Αφού R είναι της Noether, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\mathfrak{p}$ πρώτο ώστε $A \subseteq \mathfrak{p}$. Από το Λήμμα 3 και την ιδιότητα (β), χωρίς βλάβη της γενικότητα, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$.
- Άρα, από το Λήμμα 5, έχουμε ότι

  $$\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_{r_0} \subseteq \mathfrak{p}^{-1} \cdot A \subseteq R$$

  Το $\mathfrak{p}^{-1} \cdot A$ είναι ιδεώδες του R και από την επιλογή του A έχουμε ότι $\mathfrak{p}^{-1} \cdot A \notin \mathcal{A}$. Άρα, το $\mathfrak{p}^{-1} \cdot A$ γράφεται ως γινόμενο πρώτων, και κατά συνέπεια και το A γράφεται ως γινόμενο πρώτων και καταλήγουμε σε άτοπο.

□

Πρόταση 6. Έστω R περιοχή που ικανοποιεί τα (α),(β),(γ) του Θεωρήματος 9. Τότε, ο R είναι δακτύλιος Dedekind.

Απόδειξη. Έστω A μη μηδενικό ιδεώδες του $K = \mathrm{Quot}(R)$. Τότε, υπάρχει $\delta \in K \setminus \{0\}$ ώστε $\delta A \subseteq R$. Από το Λήμμα 6, υπάρχουν μη μηδενικά πρώτα ιδεώδες $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ ώστε $\delta A = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$, δηλαδή $A = \left(\delta^{-1} R\right) \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$. Από το Λήμμα 5 έχουμε ότι A είναι αντιστρέψιμο. □

Πόρισμα 4. Μια ακέραια περιοχή είναι δακτύλιος του Dedekind αν και μόνο αν ικανοποιεί τις συνθήκες (α),(β),(γ) του Θεωρήματος 9.

Θέωρημα 10. Αν R δακτύλιος του Dedekind, τότε κάθε μη-τετριμμένο ιδεώδες του γράφεται μονοσήμαντα ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών, χωρίς να λαμβάνεται υπόψην η σειρά των πρώτων παραγόντων.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5 μένει να δείξουμε το μονοσήμαντο της γραφής. Έστω $A \neq 0$ ιδεώδες του R και πρώτα ιδεώδες $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ τέτοια ώστε

$$A = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_s.$$

Από το Λήμμα 3 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε μη μηδενικό πρώτο είναι μέγιστο ιδεώδες, χωρίς βλάβη της γενικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$. Συνεχίζοντας την προηγούμενη διαδικασία συμπεραίνουμε ότι $r = s$ και $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ (ενδεχομένως να χρειαστεί να αναδιατάξουμε τα $\mathfrak{q}_i$). □

Πόρισμα 5. Η ομάδα των ιδεωδών του $K = \mathrm{Quot}(R)$, όπου R δακτύλιος Dedekind, είναι ελεύθερη αβελιανή που παράγεται από τα πρώτα ιδεώδη του R.

Απόδειξη.

- Έστω A ιδεώδες του K. Τότε, υπάρχει $\delta = b/a \in K$ μη μηδενικό ώστε $\delta A \subseteq R$. Το δA είναι μη μηδενικό ιδεώδες του R και μάλιστα $A = \left(\delta^{-1}R\right) \cdot \delta A$. Από το Λήμμα 5 αρκεί να δείξουμε ότι $\delta^{-1}R$ είναι γινόμενο δυνάμεων (όχι κατ' ανάγκη θετικών) πρώτων ιδεωδών.

- Έχουμε ότι $\delta^{-1}R = (a/b)R$, δηλαδή ισχύει ότι aR είναι γινόμενο πρώτων ιδεωδών και bR είναι γινόμενο πρώτων ιδεωδών. Αφού $\delta^{-1}R = aR \cdot \left(b^{-1}\right) R$ έχουμε το ζητούμενο.

- Από την μοναδικότητα της γραφής και από το γεγονός ότι $\mathfrak{p}^n \neq R$, για κάθε $\mathfrak{p}$ πρώτο και $n \in \mathbb{N}$ έπεται το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

5.2 Διαιρετότητα Ιδεωδών

Από τώρα και στο εξής θα θεωρούμε ότι όλοι οι δακτύλιοι είναι δακτύλιοι Dedekind.

Ορισμός 21. Έστω R δακτύλιος και A, B ιδεώδη του K. Θα λέμε ότι το B **διαιρεί** το A, αν υπάρχει $C \subseteq R$ ιδεώδες τέτοιο ώστε $A = BC$.

Ορισμός 22. Έστω R δακτύλιος και A, B ιδεώδη του K. Αν ένα ιδεώδες C διαιρεί τα A, B και για κάθε άλλο C' με $C'|A$ και $C'|B$ ισχύει ότι $C'|C$, τότε το C λέγεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των A, B και συμβολίζεται με (A, B).

Παρατήρηση 13 (Ύπαρξη και Μοναδικότητα Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη)**.** Από το Πόρισμα 5 προκύπτει ότι κάθε ιδεώδες A του K γράφεται στην μορφή

$$A = \prod_{\mathfrak{p} \text{ πρώτο}} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})}$$

όπου $a(\mathfrak{p}) \geq 0$. Άρα, αν $A = \prod_{\mathfrak{p}\ \text{πρώτο}} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})}$ και $B = \prod_{\mathfrak{p}\ \text{πρώτο}} \mathfrak{p}^{b(\mathfrak{p})}$, τότε προκύπτει ότι

$$(A, B) = \prod_{\mathfrak{p}\ \text{πρώτο}} \mathfrak{p}^{\min\{a(\mathfrak{p}), b(\mathfrak{p})\}} \tag{5}$$

και προφανώς είναι μονοσήμαντα ορισμένος.

Ορισμός 23. Με όμοιο τρόπο αν R δακτύλιος και A, B ιδεώδη του K, τότε το **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των A, B ορίζεται να είναι

$$[A, B] = \prod_{\mathfrak{p}\ \text{πρώτο}} \mathfrak{p}^{\max\{a(\mathfrak{p}), b(\mathfrak{p})\}} \tag{6}$$

Πρόταση 7. Έστω R δακτύλιος. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Αν A, B ιδεώδη του K, τότε $A \subseteq B$ αν και μόνο αν υπάρχει ιδεώδες $C \subseteq R$ με $A = B \cdot C$.

(β) Αν A ιδεώδες του K, τότε υπάρχει $a \in K$ τέτοιο ώστε $(aR) \cdot A^{-1} \subseteq R$.

(γ) Αν A, B σχετικά πρώτα ιδεώδη το R (δηλαδή $(A, B) = R$), τότε $A \cdot B = A \cap B$.

(δ) Αν A, B ιδεώδη το R (δηλαδή $(A, B) = R$), τότε $(A, B) = \langle A, B \rangle = A + B$.

Απόδειξη. (α) Η μια κατεύθυνση είναι προφανής. Για την αντιστροφή, παρατηρήστε ότι αν $C = AB^{-1} \subseteq R$, τότε $A = CB$.

(β) Έστω $a \neq 0$ στο A. Τότε, $aR \subseteq A$ και από το (α) υπάρχει $C \subseteq R$ ιδεώδες ώστε $aR = CA$. Συνεπώς, έχουμε ότι $(aR) \cdot A^{-1} = C \subseteq R$.

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $A \cap B \subseteq A \cdot B$. Έχουμε ότι $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$. Από το (α), προκύπτει ότι $A | A \cap B$ και $B | A \cap B$ και αφού A, B είναι σχετικά πρώτα έπεται ότι $A \cdot B = [A, B] | A \cap B$. Από το (α) έχουμε το ζητούμενο.

(δ) Αφού $A, B \subseteq A+B$, τότε προκύπτει ότι $A+B | A$ και $A+B | B$. Συνεπώς, $(A, B) \subseteq A+B$. Αντίστροφα, από το (α), έχουμε ότι $A \subseteq (A, B)$ και $B \subseteq (A, B)$. Επομένως, ισχύει ότι $A + B \subseteq (A, B)$.

□

5.3 Το Θεμελιώδες Θεώρημα

Ορισμός 24 (F.N.). Ένας δακτύλιος R θα λέμε ότι ικανοποιεί την **συνθήκη πεπερασμένης νόρμας** αν για κάθε μη μηδενικό ιδεώδες $A \subseteq R$ ισχύει ότι R/A είναι πεπερασμένος.

Παράδειγμα 13. Το $\mathbb{Z}$ ικανοποιεί την συνθήκη πεπερασμένη νόρμας, αφού κάθε ιδεώδες του είναι της μορφής $I = n\mathbb{Z}$ και $R/I = \mathbb{Z}_n$ πεπερασμένος.

Παράδειγμα 14. Ο δακτύλιος $\mathbb{C}[x]$ δεν ικανοποιεί την συνθήκη πεπερασμένης νόρμας αφού για $I = \langle x \rangle$, τότε έχουμε ότι $C[x]/I \cong \mathbb{C}$.

Θέωρημα 11. Έστω R δακτύλιος Dedekind, $K = \mathrm{Quot}(R)$. Έστω L/K πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση σωμάτων και S η ακέραια θήκη του R στο L. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Το S είναι δακτύλιος Dedekind.

(β) Αν ο R ικανοποιεί την F.N. τότε και ο S ικανοποιεί την F.N..

Για να αποδείξουμε το προηγούμενο Θεμελιώδες Θεώρημα, για το πρώτο σκέλος του, θα δείξουμε ότι ο S ικανοποιεί τα (α),(β),(γ) του Θεωρήματος 9. Για να πραγματοποιηθεί αυτό θα διασπάσουμε την απόδειξη σε δύο σκέλη.

Πρόταση 8. Ο S ικανοποιεί τα (α),(γ) του Θεωρήματος 9, δηλαδή είναι της Noether και ακέραια κλειστός.

Απόδειξη.

- Από το *Θεώρημα Πρωτάρχικού Στοιχείου*, αφού L/K είναι πεπερασμένη και διαχωρίσιμη, τότε υπάρχει $\vartheta \in L$ ώστε $L = K(\vartheta)$. Μάλιστα, αφού $K = \mathrm{Quot}(R)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\vartheta \in S$.
- Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχει $c \in K$ ώστε $S \subseteq cR[\vartheta]$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να δείξουμε ότι S είναι της Noether και ακέραια κλειστός.
  - Πράγματι, θεωρούμε τον επιμορφισμό R - προτύπων
  $$\varphi\colon \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{n \text{ φορές}} \to cR[\vartheta], \quad (r_0, \ldots, r_{n-1}) \mapsto r_{n-1}\vartheta^{n-1} + \cdots + r_1\vartheta + r_0.$$
  - Τότε, $cR[\vartheta]$ είναι R - πρότυπο της Noether, συνεπώς $S \subseteq cR[\vartheta]$ είναι R - πρότυπο της Noether. Από αυτό το γεγονός δείξτε ότι κάθε ιδεώδες του S είναι π.π.

– Τέλος, από το Θεώρημα 7 έχουμε ότι S είναι ακέραια κλειστός.

- Αν $x \in L$ θα συμβολίζουμε με $x^{(i)}$ το i - *συζυγές* του x. Αν $\overline{K}$ η αλγεβρική θήκη του K και $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, όπου $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ η ομάδα Galois
$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) = \left\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}) \mid \sigma(x) = x, \text{ για κάθε } x \in K\right\}$$
τότε έχουμε ότι $\sigma(x) = x^{(i)}$, για κάποιο i.

- Από την παραπάνω παρατήρηση προκύπτει ότι αν $\alpha \in S$ με $\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \vartheta^k$, τότε προκύπτει ότι $\alpha^{(i)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\vartheta^{(i)}\right)^k$.

- Τότε, προκύπτει $n \times n$ γραμμικό σύστημα (με αγνώστους a_k) της μορφής :
$$\begin{aligned} \alpha = \alpha^{(0)} &= a_0 + a_1\vartheta^{(1)} + \cdots + a_{n-1}\left(\vartheta^{(1)}\right)^{n-1} \\ &\vdots \\ \alpha^{(n-1)} &= a_0 + a_1\vartheta^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\left(\vartheta^{(n-1)}\right)^{n-1} \end{aligned}$$
Η ορίζουσα το γραμμικού συστήματος είναι μια ορίζουσα Vandermode :
$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & \vartheta^{(0)} & \left(\vartheta^{(0)}\right)^2 & \cdots & \left(\vartheta^{(0)}\right)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \vartheta^{(n-1)} & \left(\vartheta^{(n-1)}\right)^2 & \cdots & \left(\vartheta^{(n-1)}\right)^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\vartheta^{(i)} - \vartheta^{(j)}\right) \neq 0$$
όπου $D \neq 0$, γιατί L/K είναι διαχωρίσιμη. Από την μέθοδο Cramer έχουμε ότι
$$a_k = \frac{A_k}{D}, \quad A_k, D \in S, \text{ για κάθε } k = 0, 1 \ldots, n-1.$$

- Αφού $L - K(\vartheta)$, τότε θεωρούμε την $N = K\left[\vartheta^{(0)}, \ldots, \vartheta^{(n-1)}\right]$ την *κανονική θήκη* του L πάνω από το K. Συνεπώς, η ομάδα $\mathrm{Gal}(N/K)$ αποτελείται από τις μεταθέσεις του $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$, άρα προκύπτει ότι $\sigma(D) = \pm D$, για κάθε $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/K)$.

- Αφού η ποσότητα D^2 μένει αναλλοίωτη από την δράση της $\mathrm{Gal}(N/K)$, τότε $D^2 \in \mathrm{Fix}\left[\mathrm{Gal}(N/K)\right] = K$. Αφού, R είναι ακέραια κλειστός, τότε $D^2 \in S \cap K = R$.

- Συνεπώς, γράφοντας
$$K \ni a_k = \frac{A_k D}{D^2}$$
και από το γεγονός ότι $D^2 \in R$ έχουμε ότι $K \ni a_k \cdot D^2 = A_k \cdot D \in S \cap K = R$.

- Συνεπώς, για το δοθέν $\alpha \in S$ προκύπτει ότι
$$\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \vartheta^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k \cdot D}{D^2} \cdot \vartheta^k = \frac{1}{D^2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot D \cdot \vartheta^k \in cR[\vartheta]$$
όπου $c = 1/D^2$. Έτσι προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

6 Μάθημα 06

6.1 Η Συνέχεια της Απόδειξης

Λήμμα 7. Με βάση τις υποθέσεις του Θεωρήματος 11 ισχύουν τα εξής.

(α) Αν $\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες του S, τότε $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap R$ είναι πρώτο ιδεώδες του R.

(β) Έστω $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ πρώτα ιδεώδη του S με $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$. Αν $\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_2'$, τότε $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$.

Απόδειξη. (α) Αν φ είναι η σύνθεση $R \hookrightarrow S \xrightarrow{\pi} S/\mathfrak{p}$, τότε έχουμε ότι $\ker\varphi = \mathfrak{p}'$. Τώρα, αφού $R/\mathfrak{p}' \cong \mathrm{Im}\varphi$ και $S/\mathfrak{p}$ είναι περιοχή, τότε $R/\mathfrak{p}'$ είναι περιοχή.

(β)

- Θεωρούμε, προς άτοπο, ότι $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$. Τότε, υπάρχει $x \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$. Αφού $x \in S$, τότε υπάρχουν $a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$ ώστε

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

- Αν ίσχυε ότι $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{p}_1'$, τότε $x^n \in \mathfrak{p}_1$, συνεπώς $x \in \mathfrak{p}_1$. Επομένως, διαλέγουμε το μέγιστο j ώστε $a_j \notin \mathfrak{p}_1'$.
- Τότε, έχουμε ότι

$$x^j\left(x^{n-j} + a_{n-1}x^{n-j-1} + \cdots + a_{j+1}x + a_j\right) = -a_{j-1}x^{j-1} - \cdots - a_0 \in \mathfrak{p}_1$$

Αφού $x \notin \mathfrak{p}_1$, τότε έχουμε ότι $x^{n-j} + a_{n-1}x^{n-j-1} + \cdots + a_{j+1}x + a_j \in \mathfrak{p}_1$. Αφού, $x \in \mathfrak{p}_2$, τότε έχουμε ότι $a_j \in \mathfrak{p}_2' = \mathfrak{p}_1'$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 11. (α) Έχουμε ήδη δείξει ότι ο S ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (γ). Θα δείξουμε ότι κάθε μη μηδενικό πρώτο ιδεώδες του S είναι μέγιστο.

- Έστω $\mathfrak{p}_1$ μη μηδενικό, πρώτο ιδεώδες του S. Αφού S της Noether, τότε υπάρχει μέγιστο $\mathfrak{p}_2$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$. Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$.
- Τώρα, έχουμε ότι $\mathfrak{p}_1' \subseteq \mathfrak{p}_2'$. Από το Λήμμα 7 και από το γεγονός ότι R είναι Dedekind έχουμε το ζητούμενο.

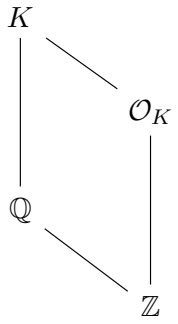
(β) Υποθέτουμε ότι R ικανοποιεί την συνθήκη F.N..

i. Έστω $\mathfrak{p}$ μη μηδενικό, πρώτο ιδεώδες (άρα και μέγιστο) του S. Θα δείξουμε ότι $S/\mathfrak{p}$ είναι πεπερασμένος. Αφού $S \subseteq cR[\vartheta]$, τότε η επέκταση σωμάτων $R/\mathfrak{p}' \subseteq S/\mathfrak{p}$ είναι πεπερασμένη και αφού $R/\mathfrak{p}'$ είναι πεπερασμένος έχουμε το ζητούμενο.

ii. Αν A μη μηδενικό ιδεώδες του S, τότε αφού S είναι Dedekind από το 10 και από Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων προκύπτει το ζητούμενο. (Εξετάσθε την περίπτωση $S/\mathfrak{p}^i$)

□

Πόρισμα 6. Έστω η επέκταση $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Ο $\mathbb{Z}$ είναι δακτύλιος του Dedekind. Έστω $\mathcal{O}_K$ ο δακτυλίος των ακέραιων αριθμών του K. Ο $\mathcal{O}_K$ δεν είναι απαραίτητα δακτύλιος μοναδικής παραγοντοποίησης, όμως με βάση το παραπάνω θεώρημα είναι δακτύλιος Dedekind, συνεπώς κάθε ιδεώδες του γράφεται μονοσήμαντα ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών.



Επίσης, αφού ο $\mathbb{Z}$ ικανοποιεί την F.N., τότε και $\mathcal{O}_K$ ικανοποιεί την F.N..

Παράδειγμα 15. Ο δακτύλιος $\mathbb{C}[x]$ είναι Dedekind, αλλά δεν ικανοποιεί την F.N., αφού $\mathbb{C}[x]/(x-1) \cong \mathbb{C}$.

6.2 Νόρμα, Βάση Ακεραιότητας και Διακρίνουσα

Έστω $K \subseteq L$ σώματα πεπερασμένη, όπου $L = K(\vartheta)$ πρωταρχικό στοιχείο της επέκτασης.

- Αφού ϑ πρωταρχικό, τότε υπάρχει $\operatorname{Irr}(\vartheta, K) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Μέσω του ομομορφισμού εκτίμισης $\varphi_\vartheta \colon K[x] \to K[\vartheta]$ με $f(x) \mapsto f(\vartheta)$ μπορούμε να δείξουμε ότι $K[x]/\langle \operatorname{Irr}(\vartheta, K)\rangle \cong K[\vartheta]$, από όπου προκύπτει ότι $K(\vartheta) = K[\vartheta]$.
- Τότε, $B = \{1, \vartheta, \vartheta^2, \ldots, \vartheta^{n-1}\}$ είναι βάση της επέκτασης με βαθμό επέκτασης
$$[L : K] = n = \dim_K L = \deg \operatorname{Irr}(\vartheta, K).$$
- Έστω $a \in L$. Θεωρούμε την απεικόνιση $L_a \colon L \to L$ με $L(x) = ax$. Τότε, για κάθε $i = 0, \ldots, n-1$ υπάρχουν $a_{j,i} \in K$ με $j = 0, \ldots, n-1$ τέτοια ώστε
$$a\vartheta^i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,i}\vartheta^j$$

Έστω $A(a) = (a_{j,i}) \in \mathbb{M}_n(K)$ ο πίνακας της L_a ως προς την βάση B. Έτσι ορίζεται απεικόνιση $A\colon L \to \mathbb{M}_n(K)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(α) $A(a+b) = A(a) + A(b)$, για κάθε $a, b \in L$

(β) $A(\lambda a) = \lambda A(a)$, για κάθε $a \in L$, και $\lambda \in K$

(γ) $A(ab) = A(a) \cdot A(b)$, για κάθε $a, b \in L$.

(δ) $A(1_L) = I_n$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες συμπεραίνουμε ότι η A είναι ομομορφισμός K - αλγεβρών.

Ορισμός 25. Ορίζουμε ως **ίχνος** του $a \in L$ ως προς την επέκταση L/K το $\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = \mathrm{Tr}(A(a))$. Ορίζουμε ως **νόρμα** του $a \in L$ ως προς την επέκταση L/K το $\mathrm{N}_{L/K}(a) = \det(A(a))$. Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του a ως προς την επέκταση L/K είναι το $\chi_{a,L/K}(x) = \det(xI_n - A(a))$

Πρόταση 9. Έστω $a \in L$ και $\chi_{a,L/K}(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) $N_{L/K}(a) = (-1)^n c_0$ και $Tr_{L/K}(a) = -c_{n-1}$

(β) Το a είναι ρίζα του $\chi_{a,L/K}(x)$.

(γ) Το $\chi_{a,L/K}(x)$ (και συνεπώς και η norm καθώς και το ίχνος) είναι ανεξάρτητα της επιλογής της βάσης.

(δ) $\mathrm{Tr}_{L/K}(\lambda a + \mu b) = \lambda \cdot \mathrm{Tr}_{L/K}(a) + \mu \cdot \mathrm{Tr}_{L/K}(b)$, για κάθε $\lambda, \mu \in K$

(ε) $N_{L/K}(ab) = N_{L/K}(a) \cdot N_{L/K}(b)$ και $N_{L/K}(a) = 0$ αν και μόνο αν $a = 0$. Συνεπώς, η απεικόνιση $N_{L/K}\colon L \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\}$ είναι μονομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. (α) Άμεσο, αφού

$$c_0 = \chi_{a,L/K}(0) = \det[-A(a)] = (-1)^n \det[A(a)] = N_{L/K}(a)$$

και

$$\chi_{a,L/K}(x) = x^n - \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{ii}\right) x^{n-1} + h(x), \quad \deg h(x) \leq n-2$$

(β) Αν θεωρήσουμε την βάση $B = \{1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}\}$ ειδωμένη ως στήλη, τότε

$$aB = Ba = B \cdot A(a) \Rightarrow B \cdot (a \cdot I_n - A(a)) = 0$$

Αφού το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση έχουμε το ζητούμενο.

(γ) Γνωστό από γραμμική άλγεβρα.

(δ) Η γραμμικότητα του ίχνους προκύπτει από τη γραμμικότητα του A.

(ε) Η πολλαπλασιαστικότητα της νόρμας προκύπτει από την πολλαπλασιαστικότητα του A και της ορίζουσας.

□

Παρατήρηση 14. • Έστω $a \in L$ και $p(x) = \mathrm{Irr}(a, K)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του a πάνω από K. Ορίζουμε τον ομομορφισμό εκτίμησης

$$\varphi_a \colon K[x] \to K[a], \quad f(x) \mapsto f(a)$$

ο οποίος είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Παρατηρήστε ότι $\ker \varphi_a = \langle p(x) \rangle$. Αφού $\chi_{a,L/K}(x)$ έχει ρίζα το a από την Πρόταση 9 έχουμε ότι $p(x) | \chi_{a,L/K}(x)$.

- Αν a είναι πρωταρχικό στοιχείο, τότε $\deg p(x) = n$, συνεπώς με επιχείρημα βαθμών και αφού $p(x), \chi_{a,L/K}(x)$ είναι μονικά, τότε $p(x) = \chi_{a,L/K}(x)$.
- Αφού $\mathrm{Tr}_{1_L,L/K} = \mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Tr}(L) \neq 0$.

Πρόταση 10. Έστω $K \subseteq L$ με $L = K(a)$ πεπερασμένη επέκταση και $p(x) = \mathrm{Irr}(a, K)$. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) $\chi_{a,L/K}(x) = p(x)^{[L:K(a)]}$

(β) $N_{L/K}(a) = \left(N_{K(a)/K}\right)^{[L:K(a)]}$

(γ) $\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = [L : K(a)] \cdot \mathrm{Tr}_{K(a)/K}(a)$

Απόδειξη. Έστω $[L : K] = n$, $[L : K(a)] = m$ και $[K(a) : K] = \ell$ οι βαθμοί των επεκτάσεων. Από τον κανόνα των πύργων ισχύει ότι $n = m \cdot \ell$.

- Αν $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ μια βάση του $L/K(a)$ και $\underline{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$ μια βάση του $K(a)/K$, τότε έχουμε ότι

$$B = \{\gamma_i \beta_j \mid i = 1, \ldots, m \; j = 1, \ldots, \ell\} = \{\gamma_1 \underline{B}, \ldots, \gamma_m \underline{B}\}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει θεωρώντας το $\underline{B}$ σαν στήλη.

- Θέλουμε να υπολογίσουμε τον $A_{L/K}(a)$ ως προς την βάση B, συνεπώς,

$$aB = \{\gamma_1 \underline{B}a, \ldots, \gamma_m \underline{B}a\} = \left\{\gamma_1 A_{K(a)/K}(a), \ldots, \gamma_m A_{K(a)/K}(a)\right\}.$$

- Συνεπώς, ο πίνακας $A_{L/K}(a)$ γράφεται στην μορφή

$$A_{L/K}(a) = \begin{pmatrix} A_{K(a)/K}(a) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & A_{K(a)/K}(a) \end{pmatrix}$$

δηλαδή ένας πίνακας σε block - μορφή. Από την τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

□

Παράδειγμα 16. Έστω $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 8 \in \mathbb{Q}[x]$ και ϑ μια ρίζα του.

- Είναι άμεσο ότι $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$, αφού είναι βαθμού 3 και δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{Q}$.
- Συνεπώς, $\mathrm{Irr}(\vartheta, \mathbb{Q}) = f(x)$ και μάλιστα $B = \left\{1, \vartheta, \vartheta^2\right\}$ είναι μια βάση του $L = \mathbb{Q}(\vartheta)/\mathbb{Q}$.
- Θεωρούμε το $a = \frac{\vartheta^2 - 2}{2}$. Θα υπολογίσουμε $\chi_{a,K/\mathbb{Q}}(x), \mathrm{N}_{L/\mathbb{Q}}(a)$ και $\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(a)$. Έχουμε ότι

$$a \cdot \vartheta = \vartheta + 4$$
$$a \cdot \vartheta^2 = \vartheta^2 + 4\vartheta$$

όπου για να εξάγετε τις τελευταίες σχέσεις εφαρμόστε ευκλείδεια διαίρεση και υπολογίστε στο ϑ. Άρα, προκύπτει ότι

$$A_{L/\mathbb{Q}}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1/2 & 1 & 4 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι υπολογίζοντας έχουμε ότι $\chi_a(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 10$, $N(a) = 10$ και $\mathrm{Tr}(a) = 2$.

7 Μάθημα 07

7.1 Norm, ίχνος και εμφυτεύσεις

Παρατήρηση 15. Έστω $K \subseteq L \subseteq M$ επεκτάσεις αλγεβρικών σωμάτων.

- Αφού τα παραπάνω σώματα έχουν χαρακτηριστική 0, τότε οι παραπάνω επεκτάσεις είναι διαχωρίσιμες και μάλιστα απλές με $L = K(\vartheta)$ και $M = L(\eta) = K(\vartheta, \eta)$.
- Αν $[L : K] = n$ και $[M : L] = m$ συμβολίζουμε με $\vartheta = \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ και $\eta = \eta_1, \ldots, \eta_m$ τα συζυγή στοιχεία των ϑ και η αντίστοιχα.

- Αν $N = K(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)$, τότε αν $\sigma\colon L \to N$ ένας K - μονομορφισμός, τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\sigma(\vartheta) \in \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$. Αφού σ καθορίζεται πλήρως από την τιμή του ϑ είναι άμεσο ότι υπάρχουν ακριβώς n το πλήθος K - εμφυτεύσεις του L τις οποίες συμβολίζουμε με σ_i και για τις οποίες ισχύει $\sigma_i(\vartheta) = \vartheta_i$.
- Με ακριβώς αντίστοιχα επιχειρήματα κάθε $\sigma_i\colon L \to N$ μπορεί να επεκταθεί σε ένα K - μονομορφισμό $\sigma_{i,j}\colon M \to N$, όπου $\sigma_{i,j} = \vartheta_i$ και $\sigma_{i,j}(\eta) = \eta_j$.
- Αφού $[M : K] = mn$ το πλήθος των K - μονομορφισμών $M \to N$ είναι ίσο με mn και συνεπώς από τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι ακριβώς οι $\sigma_{i,j}$.

Πρόταση 11. Έστω $K \subseteq L$ επέκταση αλγεβρικών σωματικών αριθμών με $[L : K] = n$. Αν $a \in L$, τότε ισχύει ότι

$$N_{L/K}(a) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a) \quad \text{και} \quad \mathrm{Tr}_{L/K}(a) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a) \tag{7}$$

όπου $\sigma_i\colon L \to N$ η i - εμφύτευση του L στην κανονική θήκη N.

Απόδειξη. Έστω $a \in L$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

(α) Υποθέτουμε ότι a είναι πρωταρχικό στοιχείο, δηλαδή $L = K(a)$. Στην περίπτωση αυτή $\deg p(x) = n$, όπου $p(x) = \mathrm{Irr}(a, K)$. Τότε, ισχύει ότι

$$x^n - \mathrm{Tr}_{L/K}(a) + \cdots + (-1)^n N_{L/K}(a) = \chi_{L/K,a}(x) = p(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \sigma_i(a)) .$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε το ζητούμενο.

(β) Αν $a \in L$ όχι κατ' ανάγκη πρωταρχικό θεωρούμε τις επεκτάσεις $K \subseteq K(a) \subseteq L$.

- Από την Πρόταση 10, αν $[L : K(a)] = m$ και $[K(a) : K] = n$, τότε προκύπτει ότι

$$N_{L/K}(a) = \left(N_{K(a)/K}(a)\right)^m = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a)^m$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το (α) σκέλος της απόδειξης με $\sigma_i\colon K(a) \to N$, όπου N κάποια κανονική θήκη που περιέχει το L.

- Από την Παρατήρηση 15, υπάρχουν ακριβώς m επεκτάσεις $\sigma_{i,j}$ των σ. Οι $\sigma_{i,j}$ είναι ακριβώς οι K - μονομορφισμοί $L \to N$ και μάλιστα $\sigma_{i,j}(a) = \sigma_i(a)$, για κάθε $j = 1, \ldots, m$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει το ζητούμενο. Ομοίως, προκύπτει το ζητούμενο για το $\mathrm{Tr}_{L/K}(a)$.

□

Παρατήρηση 16. Έστω $K \subseteq L$ επέκταση αλγεβρικών σωμάτων αριθμών με $[L : K] = n$ και $L = K(a)$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $a \in L$, τότε $N_{L/K}(a), \mathrm{Tr}_{L/K}(a) \in K$.

- Έστω R, S οι ακέραιες θήκες των K, L πάνω από το $\mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι αν $a \in S$, τότε $N_{L/K}(a), \mathrm{Tr}_{L/K}(a) \in R$.
- Θεωρούμε τις K - εμφυτεύσεις $\sigma_i \colon L \to N$. Τότε, από την Πρόταση 11, έχουμε ότι $N_{L/K}(a) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a)$ και $\mathrm{Tr}_{L/K}(a) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a)$.
- Αφού a είναι ακέραιος αλγεβρικός, τότε υπάρχει $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ με $f(a) = 0$. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $\sigma_i(a)$ είναι επίσης ρίζες του $f(x)$. Συνεπώς, $\sigma_i(a)$ είναι R - ακέραιοι αλγεβρικοί αριθμοί του N.
- Συνεπώς, $N_{L/K}(a)$ και $\mathrm{Tr}_{L/K}(a)$ είναι R - ακέραιοι αλγεβρικοί στο N ως άθροισμα και γινόμενο τέτοιων αντίστοιχα. Αφού $N_{L/K}(a), \mathrm{Tr}_{L/K}(a) \in K$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7 για την επέκταση $R \subseteq K \subseteq K$ έχουμε ότι $N_{L/K}(a), \mathrm{Tr}_{L/K}(a) \in R$

Πρόταση 12. Έστω $K \subseteq L \subseteq M$ επεκτάσεις αλγεβρικών σωμάτων αριθμών. Τότε, για κάθε $a \in M$ ισχύει ότι

$$N_{L/K}\left(N_{M/L}(a)\right) = N_{M/K}(a) \quad \text{και} \quad \mathrm{Tr}_{L/K}\left(\mathrm{Tr}_{M/L}(a)\right) = \mathrm{Tr}_{M/K}(a).$$

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 15 έχουμε ότι $N_{M/L}(a) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a)$. Τώρα, αν $\tau_j \colon L \to N$ οι K - μονομορφισμοί του L στην M έχουμε ότι

$$N_{L/K}\left(N_{M/L}(a)\right) = \prod_{j=1}^{m} \tau_j \left(\prod_{i}^{n} \sigma_i(a) \right)$$

- Παρότι τ_j είναι πολλαπλασιαστικές δεν μπορούμε να γράψουμε αψήφιστα την σχέση

$$\tau_j \left(\prod_{i}^{n} \sigma_i(a) \right) = \prod_{i=1}^{n} \tau_j \circ \sigma_i(a)$$

αφού $\sigma_i(a)$ βρίσκονται στο N και όχι κατ' ανάγκη στο L.

- Παρόλα αυτά κάθε τ_j μπορεί να επεκταθεί σε ένα K - αυτομορφισμό της N τον οποίο θα συμβολίζουμε πάλι με τ_j. Με τις παραπάνω παρατηρήσεις, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$N_{L/K}\left(N_{M/L}(a)\right) = \prod_{i,j=1}^{n,m} \tau_j \circ \sigma_i(a)$$

όπου

$$M \xrightarrow{\sigma_i} N \xrightarrow{\tau_j} N$$

είναι μια K - εμφύτευση του M στο N. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι οι $\tau_j \circ \sigma_i$ είναι διακεκριμένες, συνεπώς είναι ακριβώς οι K - εμφυτεύσεις του M στο N. Από την Πρόταση 11 έχουμε το ζητούμενο. Ομοίως, δείχνουμε το ζητούμενο στην περίπτωση του Tr.

□

7.2 Διακρίνουσα n - άδας

Ορισμός 26. Έστω $K \subseteq L$ πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση με $[L : K] = n$ και $\sigma_i \colon L \to N$ οι K - μονομορφισμοί του L στην κανονική θήκη N. Αν $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ η **ορίζουσα** του $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$ είναι η ποσότητα

$$D_{L/K}(a_1, \ldots, a_n) = \det\left[\sigma_i\left(a_j\right)\right]^2 = \left[\det \begin{pmatrix} \sigma_1(a_1) & \cdots & \sigma_n(a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(a_n) & \cdots & \sigma_n(a_n) \end{pmatrix}\right]^2 .$$

Παρατήρηση 17. Αν ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις, τότε $D_{L/K}(a_1, \ldots, a_n) \in K$.

Απόδειξη. Αν $A = \left[\sigma_i\left(a_j\right)\right]_{i,j}$ παρατηρήστε ότι

$$D_{L/K}(a_1, \ldots, a_n) = (\det A)^2 = \det\left(A \cdot A^t\right) = \det\left[\mathrm{Tr}_{L/K}(a_i a_j)\right] \in K$$

□

Πόρισμα 7. Αν ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις και R, S είναι το σύνολο των ακεραίων αλγεβρικών των K, L πάνω από το $\mathbb{Z}$, τότε για κάθε $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$ ισχύει ότι $D_{L/K}(a_1, \ldots, a_n) \in R$.

Απόδειξη. Άμεσο από τις Παρατηρήσεις 16 και 17. □

Παρατήρηση 18. Έστω $K \subseteq L$ πεπερασμένη και διαχωρίσιμη επέκταση με $[L : K] = n$ και $\sigma_i \colon L \to N$ οι K - μονομορφισμοί του L στην κανονική θήκη N. Αν $L = K(\vartheta)$ και $f(x) = \mathrm{Irr}(\vartheta, K)$, τότε έχουμε ότι $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \vartheta_i)$, όπου $\vartheta_i = \sigma_i(\vartheta)$. Τότε, η $D_{L/K}\left(1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1}\right) = \det\left(\vartheta_i^j\right)^2$ είναι μια ορίζουσα Vandermonde και έχουμε ότι

$$D_{L/K}(\vartheta) \coloneqq D_{L/K}\left(1, \vartheta, \ldots, \vartheta^{n-1}\right) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\vartheta_i - \vartheta_j) \neq 0.$$

Η ποσότητα $D_{L/K}(\vartheta)$ λέγεται **ορίζουσα** του ϑ πάνω από το K.

Θέωρημα 12. Με τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύει ότι

$$D(\vartheta) = (-1)^{n(n-1)/2} N_{L/K}\left(f'(\vartheta)\right).$$

Απόδειξη. Από την παραπάνω παρατήρηση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D(\vartheta) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\vartheta_i - \vartheta_j) &= (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (\vartheta_i - \vartheta_j) \\ = \quad (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x - \vartheta_j) \Big|_{x=\vartheta_i} &= (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} f'(\vartheta_i) \\ = \quad (-1)^{n(n-1)/2} N_{L/K}\left(f'(\vartheta)\right) & \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 17. Θεωρούμε την επέκταση $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_p)$ με $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$ και

$$f(x) = \mathrm{Irr}(\zeta_p, \mathbb{Q}) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Αφού $(x-1)f(x) = x^p - 1$, παραγωγίζοντας, έχουμε ότι $f'(\zeta_p) = \frac{p \cdot \zeta_p^{p-1}}{\zeta_p - 1}$. Έχουμε ότι

$$N(p) = p^{p-1},\ N\left(\zeta_p^{p-1}\right) = 1 \quad \text{και} \quad N(\zeta_p - 1) = p.$$

Από το παραπάνω θεώρημα και την πολλαπλασιαστικότητα της νόρμας προκύπτει ότι

$$N_{\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}}(\zeta_p) = (-1)^{(p-1)(p-2)/2} \cdot p^{p-2}.$$

8 Μάθημα 08

8.1 Ελεύθερες Αβελιανές Ομάδες Πεπερασμένου Βαθμού

Κίνητρο 5. Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών και $\mathcal{R}_K$ οι ακέραιοι αλγεβρικοί του K πάνω από το $\mathbb{Z}$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $\mathcal{R}_K$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με $\operatorname{rank}(\mathcal{R}_K) = n$, όπου $n = [K : \mathbb{Q}]$

Ορισμός 27. Μια ομάδα M καλείται **ελεύθερη αβελιανή** αν ισχύουν τα εξής :

(α) $M = m_1\mathbb{Z} + m_2\mathbb{Z} + \cdots + m_n\mathbb{Z}$

(β) Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε

$$m_1x_1 + \cdots + m_nx_n = 0$$

τότε $x_1 = \cdots = xn = 0$.

Το n καλείται **rank** της M, τα το σύνολο $\{m_1, \ldots, m_n\}$ καλείται **βάση** της M.

Παρατήρηση 19. Έστω M ελεύθερη αβελιανή ομάδα πεπερασμένου rank. Τότε, κάθε δύο βάσεις της M είναι ισοπληθικές.

Απόδειξη. Αν η M έχει μια βάση με n το πλήθος στοιχεία, τότε $M \cong \mathbb{Z}^n$. Επίσης αν M είχε μια βάση με πλήθος στοιχείων m, τότε θα έπρεπε $\mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n$. Όμως για τυχόν p πρώτο ισχύει ότι

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\pi^m} \mathbb{Z}_p^m$$

όπου από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\mathbb{Z}_p^n \cong \mathbb{Z}_p^m$, δηλαδή $n = m$. □

Ορισμός 28. Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ λέγεται **unimodular** αν $\det A \in \{-1, 1\}$.

Θέωρημα 13. Έστω $\{m_1, \ldots, m_n\}$, $\{m'_1, \ldots, m'_n\}$ βάσεις μιας ελεύθερης αβελιανής ομάδας πεπερασμένου βαθμού (rank), τότε υπάρχει πίνακας A με

$$\begin{pmatrix} m'_1 \\ \vdots \\ m'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

αν και μόνο αν A είναι unimodular.

Απόδειξη. ″ Αντωνιάδης, Ι., Κοντογεώργης, Α. (2021). Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών ″ □

Παράδειγμα 18. Στο $\mathbb{Z}^2$ μία βάση είναι $\{(0,1),(1,0)\}$ και ένας unimodular πίνακας που επάγει νέες βάσεις είναι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Πρόταση 13. Έστω $(M,+)$ μία ελεύθερη αβελιανή ομάδα πεπερασμένου βαθμού n και $T \leq M$.

(α) Η T είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα πεπερασμένου βαθμού και $\text{rank}T \leq \text{rank}M$.

(β) Υπάρχει μία βάση $\{w_1,\ldots,w_n\}$ της M και $e_1,\ldots,e_d \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ με $d \leq n$ τέτοια ώστε η $\{e_1w_1,\ldots,e_dw_d\}$ να είναι βάση της T και $e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_d$.

Απόδειξη. (α) Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $\text{rank}M = n$.

- Αν $n = 1$, τότε $M = \mathbb{Z}m_1 \cong \mathbb{Z}$ κυκλική και οι υποομάδες της είναι της μορφής $T = \mathbb{Z}t$.
- Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για όλες τις ελεύθερες αβελιανές ομάδες με rank $= n-1$. Τότε για την $M = \bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}m_i$ ορίζουμε την υποομάδα $M_{n-1}\bigoplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}m_i$ και την $T_{n-1} = T \cap M_{n-1}$. Από την αρχική υπόθεση ισχύει ότι $T_{n-1} \leq M_{n-1}$ και είναι ελεύθερη αβελιανή και μάλιστα $\text{rank}(T_{n-1}) \leq n-1$.
- Θα δείξουμε ότι υπάρχει $t_n \in T$ τέτοιο ώστε $T = T_{n-1} \oplus t_n\mathbb{Z}$.
- Από το μονοσήμαντο της γραφής $m = \sum_{i=1}^{n} x_im_i$ μπορούμε να ορίσουμε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $\pi_j\colon M \to \mathbb{Z}$ με $\pi_j(m) = x_j$. Τότε, παρατηρούμε ότι το σύνολο
$$\pi_n(T) = \{x \in \mathbb{Z} \mid \ \exists t \in T \ : \pi_n(t) = x\}$$
είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Συνεπώς, υπάρχει $e_0 \in \mathbb{Z}$ ώστε $\pi_n(T) = e_0\mathbb{Z}$. Συνεπώς, υπάρχει $t_0 \in T$ ώστε $\pi_n(t_0) = e_0$
  - Αν $\pi_n(T) = 0$, τότε έχουμε ότι $T = T_{n-1} \leq M_{n-1}$ και έχουμε το ζητούμενο.
  - Υποθέτουμε ότι $\pi_n(T) \neq 0$, συνεπώς $e_0 \neq 0$ και $t_0 \neq 0$. Θα δείξουμε ότι $T = T_{n-1} \oplus \mathbb{Z}t_0$. Έστω $xt_0 \in T_{n-1}$, τότε έχουμε ότι $\pi_n(xt_0) = xe_0 = 0$, δηλαδή $x = 0$.
  - Αν $t \in T$, τότε έχουμε ότι
$$\pi_n(t) = x_0e_0 = \pi_n(x_0t_0) \Rightarrow t - x_0e_0 \in \ker\pi_n = M_{n-1}$$
και έχουμε το ζητούμενο.

(β) Για κάθε $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})$ είναι σαφές ότι $\varphi(T)$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$. Θεωρούμε την οικογένεια
$$\mathcal{J} = \{\varphi(T) \mid \varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Z})\} \neq \emptyset$$

- Αφού $\mathbb{Z}$ είναι της Noether, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο $\varphi_0 \colon M \to \mathbb{Z}$ ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.
- Τότε, ομοίως με παραπάνω, υπάρχουν $e_0 \in \mathbb{Z}$ ώστε $\varphi_0(T) = e_0\mathbb{Z}$ και $t_0 \in T$ ώστε $\varphi_0(t_0) = e_0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $w_0 \in M$ ώστε $t_0 = e_0 w_0$
- Αν $\{m_1, \dots, m_n\}$ μια βάση του M, τότε έχουμε ότι

  $$t = \pi_1(t)m_1 + \cdots + p_n(t)m_n.$$

  Για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $e_0 | \pi_i(t)$, για κάθε $i = 1, \dots, n$.
- Αν δείξουμε ότι

  $$e_0\mathbb{Z} = e_0\mathbb{Z} + \pi_t\mathbb{Z} = (ke_0 + \ell\pi_i(t))$$

  για κάθε $k, \ell \in \mathbb{Z}$, τότε θα έχουμε το ζητούμενο.
- Θεωρούμε τον ομομορφισμό ομάδων

  $$\varphi_{k,\ell} \colon M \to \mathbb{Z}, \quad \varphi_{k,\ell}(m) = k\varphi_0(m) + \ell\pi_i(m)$$

  Τότε, παρατηρούμε ότι $\varphi_{k,\ell}(T) \in \mathcal{J}$ και από την μεγιστικότητα του $\varphi_0(T)$ καταλήξτε σε ισότητα.
- Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι $M = \mathbb{Z}\omega_0 \oplus \ker\varphi_0$ και $T = \mathbb{Z}t_0 + (\ker\varphi_0 \cap T)$. Τότε, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ βάση του $\ker\varphi_0$ και $e_1 | \cdots | e_d$ ώστε $e_1\omega_1, \dots, e_{d-1}\omega_{d-1}$ βάση του $T \cap \ker\varphi_0$
- Θεωρώντας κατάλληλη $\varphi \colon M \to \mathbb{Z}$, δείξτε ότι $e_0 | e_1$. Τότε έχουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 20. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για R ελεύθερα πρότυπα στην περίπτωση που R είναι περιοχή κύριων ιδεωδών.

Πρόταση 14. Έστω $M = \mathbb{Z}m_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}m_n$ και $T = \mathbb{Z}t_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}t_n$ ελεύθερες αβελιανές και $T \leq M$ με $\mathrm{rank}M = \mathrm{rank}T = n$. Τότε, αν υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένος $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ τέτοιος ώστε

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

τότε ισχύει ότι $[M : T] = |\det A|$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν βάση $w_1, \dots, w_n$ της M και $e_1 | \cdots | e_n$ τέτοια ώστε $T = \mathbb{Z}e_1w_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_nw_n$. Από το Θεώρημα 13 προκύπτει ότι υπάρχουν B, C unimodular ώστε

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} e_1w_1 \\ \vdots \\ e_nw_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

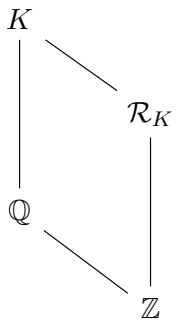
Επίσης, ισχύει ότι

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \operatorname{diag}(e_1, \dots, e_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \operatorname{diag}(e_1, \dots, e_n) \cdot B \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Από το μονοσήμαντο του A έχουμε ότι $A = C^{-1} \cdot \operatorname{diag}(e_1, \dots, e_n) \cdot B$ και έτσι προκύπτει ότι $|\det A| = |e_1| \cdots |e_n|$. Τέλος, είναι άμεσο ότι $M/T = \bigoplus \mathbb{Z}_{|e_i|}$, συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. □

8.2 Σύνολα Ακεραίων Αλγεβρικών και Ελεύθερες Αβελιανές

Πρόταση 15. Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών με $[K : \mathbb{Q}] = n$. Ο δακτύλιος $\mathcal{R}_K$ των ακεραίων αλγεβρικών του K πάνω από το $\mathbb{Z}$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα με $\operatorname{rank}\mathcal{R}_K = n$.



Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$. Από την απόδειξη της Πρότασης 8 έχουμε ότι Έχουμε ότι

$$\mathbb{Z}(\vartheta) \subseteq \mathcal{R}_K \subseteq \frac{1}{D_K(\vartheta)}\mathbb{Z}(\vartheta)$$

Τα $\mathbb{Z}$ - πρότυπα

$$\mathbb{Z}(\vartheta) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\vartheta^i \quad \text{και} \quad \frac{1}{D_K(\vartheta)}\mathbb{Z}(\vartheta) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z}\left(\vartheta^i / \frac{1}{D_K(\vartheta)}\right)$$

είναι ελεύθερες αβελιανές ομάδες βαθμού n, συνεπώς από την Πρόταση 13 έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 16. Θεωρούμε $\{w_1, \ldots, w_n\}$ βάση της $K/\mathbb{Q}$ και $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j$. Αν $A = (a_{ij})$, τότε ισχύει ότι

$$D_K(a_1, \ldots, a_n) = (\det A)^2 \cdot D_K(w_1, \ldots, w_n)$$

Απόδειξη. Αφού $D_K(a_1, \ldots, a_n) = \det\left(\mathrm{Tr}_K(a_i a_j)\right)$ έχουμε

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(a_k a_\ell) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} w_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j} w_j\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ki} a_{\ell j} \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(w_i w_j)$$

. Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε στην ισότητα πινάκων

$$(\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(a_k \cdot a_\ell))_{1\le k,\ell\le n} = (a_{ki}) \cdot \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(w_i w_j) \cdot (a_{\ell j})^t$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε το ζητούμενο. □

9 Μάθημα 09

9.1 Βάσεις Ακεραιότητας

Ορισμός 29. Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών με $[K : \mathbb{Q}] = n$. Τα $\mathbb{Q}$ - γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathcal{R}_K$ λέγονται **βάση ακεραιότητας** αν είναι βάση της ελευθέρης αβελιανής ομάδας $\mathcal{R}_K$, δηλαδή

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_n.$$

Παρατήρηση 21. Προφανώς, κάθε βάση ακεραιότητας του K είναι και βάση της επέκτασης $K/\mathbb{Q}$.

Παρατήρηση 22. Έστω $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ και $\{\omega_1', \ldots, \omega_n'\}$ δύο βάσεις ακεραιότητας του K. Τότε, από το Θεώρημα 13 υπάρχει A unimodular ώστε

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \vdots \\ \omega_n' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \vdots \\ \omega_n' \end{pmatrix}.$$

Από την Πρόταση 16 έχουμε ότι

$$D_K\left(\omega_1', \ldots, \omega_n'\right) = \det(A)^2 \cdot D_K\left(\omega_1, \ldots, \omega_n\right) = D_K\left(\omega_1, \ldots, \omega_n\right).$$

Ορισμός 30. Έστω $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ βάση ακεραιότητας του K. Η **ορίζουσα** του K ορίζεται να είναι η

$$D_K = D_K(\omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Από το Πόρισμα 7 είναι σαφές ότι $D_K \in \mathbb{Z}$.

Κίνητρο 6. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{R}_K$ γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$. Μπορούμε να βρούμε ένα κριτήριο ώστε να εξετάζουμε αν τα $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{R}_K$ είναι βάση ακεραιότητας ; Στην περίπτωση που δεν είναι μπορούμε να κατασκεύασουμε ένα αλγόριθμο ώστε να ″ παραχθεί ″ μια βάση ακεραιότητας από το αρχικό σύνολο $\{a_1, \ldots, a_n\}$;

Πρόταση 17. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{R}_K$ γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$ και $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ βάση ακεραιότητας του K. Τότε ισχύει ότι

$$D_K(a_1, \ldots, a_n) = m^2 D_K(\omega_1, \ldots, \omega_n), \quad \text{με } m = \left[\mathcal{R}_K : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}a_i\right].$$

Πρόταση 18. Άμεσο από την Πρόταση 14

Πόρισμα 8. Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{R}_K$ γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$. Αν $D_K(a_1, \ldots, a_n)$ είναι ελεύθερη τετραγώνου, τότε $a_1, \ldots, a_n$ είναι βάση ακεραιότητας του K.

Παράδειγμα 19. Το αντίστροφο του προηγούμενου πορίσματος δεν ισχύει γενικά ! Έστω $K = \mathbb{Q}(i)$ με $[K : \mathbb{Q}] = 2$ και $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}[i]$. Τότε, είναι άμεσο ότι $\{1, i\}$ είναι μια βάση ακεραιότητας του K. Παρόλα αυτά

$$D_K(1, i) = \left[\det \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}\right]^2 = -4$$

συνεπώς D_K δεν είναι ελεύθερη τετραγώνου.

Θέωρημα 14. Ισχύει ότι $D_K \equiv 0, 1 \mod 4$.

Απόδειξη. Έστω $\omega_1, \ldots, \omega_n$ βάση ακεραιότητας του K. Αν με $\omega_i^{(j)}$ συμβολίζουμε τα συζυγή των ω_i, τότε έχουμε ότι $D_K^{1/2} = \det\left[\omega_i^{(j)}\right]$. Από εναλλακτικό ορισμό της ορίζουσας έχουμε ότι

$$\det\left[\omega_i^{(j)}\right] = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \omega_i^{\sigma(i)} = \underbrace{\sum_{\sigma\in A_n} \prod_{i=1}^{n} \omega_i^{\sigma(i)}}_{A} - \underbrace{\sum_{\sigma\in S_n\setminus A_n} \prod_{i=1}^{n} \omega_i^{\sigma(i)}}_{B}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $D_K = (A-B)^2 = (A+B)^2 - 4AB$. Αν δείξουμε ότι $A+B, AB \in \mathbb{Q}$, δεδομένου ότι $A+B, AB$ είναι ακέραιοι αλγεβρικοί πάνω από το $\mathbb{Z}$ σε μια κανονική θήκη N, τότε θα έχουμε ότι $A+B, AB \in \mathbb{Z}$. Δεδομένου αυτού θα έχουμε ότι

$$D_K \equiv (A+B)^2 \equiv 0, 1 \mod 4.$$

Παρατηρήστε ότι $A+B, AB$ παραμένουν αναλλοίωτα στις δράσεις των $\sigma \in \operatorname{Gal}(N,\mathbb{Q})$ και αφού $N/\mathbb{Q}$ είναι επέκταση Galois, τότε έχουμε ότι

$$A+B, AB \in \operatorname{Fix}\left[\operatorname{Gal}(N,\mathbb{Q})\right] = \mathbb{Q}.$$

□

Παράδειγμα 20. Θεωρούμε το ανάγωγο πολυώνυμο $f(x) = x^3 - x - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ και ϑ μια ρίζα του σε επέκταση. Τότε $[K:\mathbb{Q}] = 3$, όπου $K = \mathbb{Q}(\vartheta)$.

- Γνωρίζουμε ότι $\{1, \vartheta, \vartheta^2\}$ είναι βάση της επέκτασης $K/\mathbb{Q}$. Είναι όμως βάση ακεραιότητας ;
- Από το Θεώρημα 12 έχουμε ότι $D(\vartheta) = -N_K(f'(\vartheta))$. Έχουμε ότι $f'(\vartheta) = 3\vartheta^2 - 1$, συνεπώς ισχύει ότι

  $$D(\vartheta) = -\left(3\vartheta_1^2 - 1\right)\cdot\left(3\vartheta_2^2 - 1\right)\cdot\left(3\vartheta_3^2 - 1\right)$$

  όπου $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ είναι τα συζυγή του ϑ.
- Από τον ορισμό του $f(x)$ και τους τύπους Vieta έχουμε ότι

  $$\begin{aligned} \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 &= 0 \\ \vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_3 + \vartheta_2\vartheta_3 &= 1 \\ \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 &= 2 \end{aligned}$$

- Από το $D(\vartheta)$ και από τις παραπάνω σχέσεις, υπολογίζοντας, προκύπτει ότι $D(\vartheta) = -104 = -26\cdot 2^2$
- Από την Πρόταση 17 ισχύει ότι $D(\vartheta) = -2^2\cdot 26 = m^2 D_K$. Συνεπώς, έχουμε ότι $m = 1$ ή $m = 2$. Αν $m = 2$, τότε $D_K = -26 \equiv 2 \mod 4$ και από το παραπάνω θεώρημα καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, $\{1, \vartheta, \vartheta^2\}$ είναι βάση ακεραιότητας του K.

Παράδειγμα 21 (Τετραγωνικά Σώματα Αριθμών)**.** Έστω K ένα τετραγωνικό σώμα αριθμών. Από τα αποτελέσματα της Διάλεξης 2 έχουμε ότι $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, όπου d είναι ένας ακέραιος ελεύθερος τετραγώνου και

$$\mathcal{R}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[d], & \text{αν } d \equiv 2, 3 \mod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right], & \text{αν } d \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

i. Αν $d \not\equiv 1 \mod 4$, τότε $\{1, \sqrt{d}\}$ είναι μια βάση ακεραιότητας του K, συνεπώς έχουμε ότι

$$D_K = \left[\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{d} \\ 1 & -\sqrt{d} \end{pmatrix}\right]^2 = 4d$$

ii. Αν $d \equiv 1 \mod 4$, τότε $\left\{1, \left(1 + \sqrt{d}\right)/2\right\}$ και η αντίστοιχη ορίζουσα ισούται με $D_K = d$.

9.2 Αλγόριθμος Υπολογισμού Βάσης Ακεραιότητας

Κίνητρο 7. Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών με $[K : \mathbb{Q}] = n$. Σκοπός μας είναι δοσμένους ένος $\mathbb{Q}$ - γραμμικά ανεξάρτητου υποσυνόλου του $\mathcal{R}_K$ να βρούμε μια βάση ακεραιότητας του K.

Παρατήρηση 23. Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών με $[K : \mathbb{Q}] = n$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{R}_K$ γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$. Αν $m = [\mathcal{R}_K : H] \neq 1$, τότε υπάρχει $p|m$ πρώτος , συνεπώς $p||\mathcal{R}_K/H|$. Από το Θεώρημα του Cauchy, υπάρχει $\overline{\vartheta} \in \mathcal{R}_K/H$ τάξης p, δηλαδή $p\vartheta \in H$. Αφού $\vartheta \notin H$, μπορούμε να επιλέξουμε $0 \leq m_1, \ldots, m_n < p$ τέτοια ώστε

$$\vartheta = \frac{m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n}{p} \tag{8}$$

Παρατήρηση 24. Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών με $[K : \mathbb{Q}] = n$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{R}_K$ γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$. Αν $\omega_1, \ldots, \omega_n$ μια βάση ακεραιότητας του K, τότε έχουμε ότι

$$D_K(a_1, \ldots, a_n) = m^2 D_K(\omega_1, \ldots, \omega_n), \quad m = [\mathcal{R}_K : H]$$

όπου $H = \bigoplus \mathbb{Z}_i a_i$.

Αλγόριθμος Εύρεσης Βάσης Ακεραιότητας

Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών με $[K : \mathbb{Q}] = n$ και $B = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathcal{R}_K$.

(α) Υπολογίζουμε την ορίζουσα $D_K(a_1, \ldots, a_n)$ την οποία αναλύοντας σε πρώτους γράφεται στην μορφή

$$D_K(a_1, \ldots, a_n) = p_1^2 \cdots p_k^2 \cdot d$$

όπου d είναι ελεύθερο τετραγώνου. Αν $k = 0$, τότε το παραπάνω σύνολο είναι βάση ακεραιότητας.

(β) Για κάθε $p_1, \ldots, p_k$ εξετάζουμε αν υπάρχει ϑ της μορφής 8. Αν δεν υπάρχει, από την Παρατήρηση 23, το B είναι βάση ακεραιότητας.

(γ) Αν υπάρχει τέτοιο p_j, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το p_1, ώστε να υπάρχει ϑ της μορφής 8, τότε "πετώντας κατάλληλο" a_ℓ, χωρίς βλάβη της γενικότητας το a_n, και αντικαθιστώντας το ϑ (ή ενδεχομένως με ακέραιο πολλαπλασιό του), προκύπτει μια καινούρια βάση της επέκτασης $B' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, \vartheta\}$ για την οποία ισχύει

$$D_K(B') = \frac{1}{p_1^2} D_K(B) = p_2^2 \cdots p_k^2 \cdot d$$

(δ) Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε τελικά σε μια βάση ακεραιότητας του K.

10 Μάθημα 10

10.1 Norm Ιδεώδους Αλγεβρικού Σώματος Αριθμών

Παρατήρηση 25. Έστω K ένα αλγεβρικό σώμα αριθμών και $\mathcal{R}_K$ ο δακτύλιος των ακέραιων αλγεβρικών του K πάνω από το $\mathbb{Z}$. Από το Πόρισμα 6, έχουμε ότι $\mathcal{R}_K$ είναι δακτύλιος του Dedekind και μάλιστα ικανοποιεί την συνθήκη $F.N$. Συνεπώς, για κάθε ιδεώδες $A \subseteq \mathcal{R}_K$, ισχύει ότι $|\mathcal{R}_K/A| < \infty$.

Ορισμός 31. Αν A ακέραιο ιδεώδες του $\mathcal{R}_K$ ορίζουμε ως **norm** του A το φυσικό αριθμό

$$N_K(A) = |\mathcal{R}_K/A|$$

Κίνητρο 8. Αφού ο $\mathcal{R}_K$ είναι δακτύλιος Dedekind, τότε κάθε ακέραιο (ή κλασματικό) ιδεώδες A γράφεται ως

$$A = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})}$$

με $a(\mathfrak{p}) \in \mathbb{N}$ (ή $a(\mathfrak{p}) \in \mathbb{Z}$), όπου με $\mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)$ συμβολίζουμε το σύνολο των πρώτων ιδεωδών του $\mathcal{R}_K$. Θα δείξουμε ότι ο υπολογισμός της norm γίνεται απλούστερος, δείχνοντας ότι

$$N_K(A) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} N_K(\mathfrak{p})^{a(\mathfrak{p})}$$

Για να δειχθεί όμως το παραπάνω πρέπει να αποδείξουμε μια σειρά από προτάσεις.

Παρατήρηση 26. Έστω $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_K)$ διαφορετικά πρώτα ιδεώδη. Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ είναι comaximal, δηλαδή $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \mathcal{R}_K$.

Απόδειξη. Για να δείξουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.

(α) Αφού $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, υπάρχει A ακέραιο ιδεώδες ώστε

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \cdot A$$

1. Από τη μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη, έχουμε ότι $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ ή $\mathfrak{q}$ ή $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}$.
2. Αφού $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ και αφού κάθε μη μηδενικό πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο, τότε οι πρώτες δύο περιπτώσεις απορρίπτονται και προκύπτει ότι $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.

□

Πόρισμα 9. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_K)$ διακεκριμένα, ισχύει

$$\mathfrak{p}^n + \mathfrak{q}^m = \mathcal{R}_K.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιήστε την παραπάνω παρατήρηση και την Άσκηση 2.40 του [Fulton, 2008]. □

Θέωρημα 15 (Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων)**.** Έστω $A_1, \ldots, A_k$ comaximal ανά δύο πρώτα ιδεώδη του $\mathcal{R}_K$. Τότε, η απεικόνιση

$$\varphi \colon \mathcal{R}_K / \bigcap_{i=1}^{k} A_i \to \prod_{i=1}^{k} \mathcal{R}_K / A_i, \quad \varphi\left(x + \bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = (x + A_1, \ldots, x + A_k)$$

είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

Απόδειξη. Η απόδειξη παρατίθεται στο [Scott, 2015] και στο [Antoniadis, 2021] □

Πρόταση 19. Έστω A ένα ιδεώδες του $\mathcal{R}_K$, το οποίο αναλύεται σε γινόμενο πρώτων ιδεωδών ως εξής

$$A = \prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{p}_i^{a_i(A)}$$

Τότε, ισχύει ότι

$$\mathcal{R}_K/A \cong \prod_{i=1}^{\ell} \mathcal{R}_K/\mathfrak{p}_i^{a_i(A)}.$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται άμεσα από το Πόρισμα 9 και το Θεώρημα 15. □

Λήμμα 8. Έστω $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_K)$. Τότε, οι προσθετικές ομάδες $\mathcal{R}_K/\mathfrak{p}$ και $\mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη.

- Από την μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη, τότε $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneqq \mathfrak{p}^n$, συνεπώς υπάρχει $a \in \mathfrak{p}^n \setminus \mathfrak{p}^{n+1}$.
- Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi\colon \mathcal{R}_K \to \mathfrak{p}^n$ με $\varphi(x) = ax$, η οποία προφανώς είναι ομομορφισμός ομάδων. Αν ψ είναι η παρακάτω σύνθεση

$$\underbrace{\mathcal{R}_K \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{p}^n \xrightarrow{\pi} \mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}}_{\psi}$$

  Τότε, παρατηρούμε ότι $\mathfrak{p} \subseteq \ker\psi$, με $\ker\psi = \left\{x \in \mathcal{R}_K \mid ax \in \mathfrak{p}^{n+1}\right\}$. Παρότι ψ είναι ομομορφισμός ομάδων, ισχύει ότι $\ker\psi$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{R}_K$ και αφού $\mathfrak{p}$ είναι μέγιστο και $\ker\psi \subsetneqq \mathcal{R}_K$, τότε $\ker\psi = \mathfrak{p}$.
- Συνεπώς, ορίζεται μονομορφισμός ομάδων

$$\tilde{\psi}\colon \mathcal{R}_K/\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}, \quad \tilde{\psi}(x+\mathfrak{p}) = ax + \mathfrak{p}^{n+1}.$$

- *Η $\tilde{\psi}$ είναι ισομορφισμός.* Για να δείξουμε ότι $\tilde{\psi}$ είναι επί, αρκεί να δείξουμε ότι

$$a \cdot \mathcal{R}_K + \mathfrak{p}^{n+1} = \mathfrak{p}^n.$$

  Αρχικά αφού $a \in \mathfrak{p}^n$, τότε είναι σαφές ότι $a \cdot \mathcal{R}_K + \mathfrak{p}^{n+1} \subseteq \mathfrak{p}^n$, συνεπώς υπάρχει ακέραιο ιδεώδες A ώστε

$$a \cdot \mathcal{R}_K + \mathfrak{p}^{n+1} = A \cdot \mathfrak{p}^n.$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει ιδεώδες B τέτοιο ώστε

$$\mathfrak{p}^{n+1} = B \cdot \left(a \cdot \mathcal{R}_K + \mathfrak{p}^{n+1}\right) = AB \cdot \mathfrak{p}^n.$$

Από τη μοναδικότητα ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη, διακρίνοντας περιπτώσεις για τα A, B, προκύπτει ότι $A = \mathcal{R}_K$ και έχουμε το ζητούμενο.

□

Θέωρημα 16 (Πολλαπλασιαστικότητα της Norm)**.** Έστω A, B ακέραια ιδεώδη του K. Τότε, ισχύει ότι

$$N_K(A \cdot B) = N_K(A) \cdot N_K(B).$$

Απόδειξη.

- Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)$ ισχύει ότι

$$N_K\left(\mathfrak{p}^n\right) = \left[N_K\left(\mathfrak{p}\right)\right]^n, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης είναι άμεση με χρήση επαγωγής και του 2ου θεωρήματος ισομορφισμών ομάδων

$$\mathcal{R}_K/\mathfrak{p}^n \cong \frac{\mathcal{R}_K/\mathfrak{p}^{n+1}}{\mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{n+1}}$$

όπου από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$$\left|\mathcal{R}_K/\mathfrak{p}^{n+1}\right| = \left|\mathcal{R}_K/\mathfrak{p}^n\right| \cdot \left|\mathcal{R}_K/\mathfrak{p}\right|.$$

- Θεωρούμε A ακέραιο ιδεώδες του K, το οποίο γράφεται ως γινόμενο πρώτων ιδεωδών στη μορφή

$$A = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})}$$

Από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων και το πρώτο σκέλος της απόδειξης είναι άμεσο ότι

$$N_K(A) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} N_K\left(\mathfrak{p}\right)^{a(\mathfrak{p})}$$

- Έστω A, B ακέραια ιδεώδη του K τα οποία επιδέχονται ανάλυση σε γινόμενο πρώτων ιδεωδών ως εξής:

$$A = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})} \quad \text{και} \quad B = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} \mathfrak{p}^{b(\mathfrak{p})}$$

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$N_K(A \cdot B) = N_K\left(\prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})+b(\mathfrak{p})}\right) = N_K(A)\cdot N_K(B).$$

□

Παρατήρηση 27. Με βάση το παραπάνω θεώρημα, δείξαμε ότι για κάθε ακέραιο ιδεώδες $A = \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})}$, ισχύει ότι

$$N_K(A) = \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} N_K\left(\mathfrak{p}\right)^{a(\mathfrak{p})}$$

Συνεπώς, με αυτό το τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό της norm ιδεώδους και σε κλασματικά ιδεώδη ως εξής : Αν $A = \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} \mathfrak{p}^{a(\mathfrak{p})}$, με $a\left(\mathfrak{p}\right) \in \mathbb{Z}$, τότε ορίζουμε norm του A να είναι η ποσότητα

$$N_K(A) \coloneqq \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)} N_K\left(\mathfrak{p}\right)^{a(\mathfrak{p})}$$

Πρόταση 20. Η norm πρώτου ιδεώδους του K είναι ίση με δύναμη κάποιου πρώτου αριθμού.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(\mathcal{R}_K)$ μη μηδενικό. Τότε, $\mathfrak{p}$ είναι μέγιστο, άρα το πηλίκο $\mathcal{R}_K/\mathfrak{p}$ είναι ένα πεπερασμένο σώμα, του οποίου το πλήθος ισούται με κάποια δύναμη πρώτου αριθμού. □

Πρόταση 21. Έστω $a \in \mathcal{R}_K \setminus \{0\}$. Τότε, ισχύει ότι

$$N_K(a\mathcal{R}_K) = \left|N_{K/\mathbb{Q}}(a)\right|$$

Απόδειξη. Έστω $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ μια βάση ακεραιότητας του K. Αφού $\mathcal{R}_K/a\mathcal{R}_K$ είναι πεπερασμένο, τότε $a\mathcal{R}_K$ είναι ελεύθερη αβελιανή τάξης n και μάλιστα

$$a\mathcal{R}_K = \bigoplus \mathbb{Z}a\omega_i.$$

Έχουμε ότι

$$a\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots \\ \omega_n\end{pmatrix} = A(a)\cdot\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots \\ \omega_n\end{pmatrix}.$$

Από την Πρόταση 14 και του ορισμό της νόρμας έχουμε ότι

$$N_K(a\mathcal{R}_K) = [\mathcal{R}_K : a\mathcal{R}_K] = |\det\left(A(a)\right)| = \left|N_{K/\mathbb{Q}}(a)\right|$$

□

Παρατήρηση 28. Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι, για κάθε A ιδεώδες του $\mathcal{R}_K$, τότε ισχύει ότι $N_{K/\mathbb{Q}}(A) \in A$.

Παράδειγμα 22. Έστω $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$, όπου $m \equiv 2 \mod 4$. Επομένως, από το Παράδειγμα 21, έχουμε ότι $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{6}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{6}$. Θα υπολογίσουμε την ποσότητα $N_K(A)$, όπου A είναι το κλασματικό ιδεώδες $A = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\sqrt{6}/2\right)$.

- Παρατηρήστε ότι $A = (1/2)I$, όπου $I = 2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{6}$, συνεπώς έχουμε ότι $N_K(A) = [N_K(2\mathcal{R}_K)]^{-1} \cdot N_K(I) = N_K(I)/4$.
- Τώρα, παρατηρούμε ότι $\left\{2, \sqrt{6}\right\}$ είναι μια βάση του I και μάλιστα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

  συνεπώς, έχουμε ότι $N_K(I) = |\mathcal{R}_K/I| = |\det(A)| = 2$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $N_K(A) = 1/2$.

Παράδειγμα 23. Έστω $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{-5}\right)$ με $-5 \equiv 3 \mod 4$. Επομένως, από το Παράδειγμα 21, έχουμε ότι

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}.$$

Θα υπολογίσουμε την ποσότητα $N_K(A)$, όπου $A = 2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(1 + \sqrt{-5})$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-5} \end{pmatrix}$$

Ομοίως με το παραπάνω παράδειγμα είναι άμεσο ότι $N_K(A) = 2$.

10.2 Ομάδα Κλάσεων Ιδεωδών

Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών με $[K : \mathbb{Q}] = n$, $\mathcal{I}_K$ η ομάδα κλασματικών ιδεωδών του K (χωρίς το 0) και $\mathcal{H}_K = \{a\mathcal{R}_K \mid a \in K \setminus \{0\}\}$.

Ορισμός 32. Θα ονομάζουμε ομάδα κλάσεων ιδεωδών την ομάδα πηλίκο

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{I}_K/\mathcal{H}_K.$$

Με $\mathfrak{h}_k$ συμβολίζουμε την τάξη της ομάδας $\mathcal{C}_K$

Παρατήρηση 29. Γνωρίζουμε, ότι κάθε περιοχή κύριων ιδεωδών είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης. Παρόλα αυτά το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα, ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[x, y]$ είναι Π.Μ.Π., αλλά δεν είναι Π.Κ.Ι. Παρόλα αυτά το αντίστροφο ισχύει κάτω από ειδικές προϋποθέσεις!

Πρόταση 22. Ο αριθμός κλάσεων της ομάδας κλάσεων ιδεωδών ισούται με 1 αν και μόνο αν $\mathcal{R}_K$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίσης.

Απόδειξη.

- Το ευθύ είναι άμεσο, καθώς αν $\mathfrak{h}_K = 1$, τότε $\mathcal{R}_K$ είναι Π.Κ.Ι.
- Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\mathcal{R}_K$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του $\mathcal{R}_K$ είναι κύριο. Έστω $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Spec}(R)$ και $a \in \mathfrak{p} \backslash \{0\}$. Τότε, υπάρχουν ανάγωγα στοιχεία $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{R}_K$ ανάγωγα και $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε
$$a = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$$
- Γνωρίζουμε ότι σε Π.Μ.Π. κύρια ιδεώδη που παράγονται από ανάγωγα στοιχεία είναι πρώτα. Άρα, κάθε ιδεώδες $\mathfrak{p}_i = \langle p_i \rangle$ είναι πρώτο.
- Έχουμε ότι
$$\langle a \rangle = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{p}_i^{a_i} \subseteq \mathfrak{p}$$
- Αφού $\mathfrak{p} | \langle a \rangle$, από την μοναδικότητα ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη, προκύπτει ότι υπάρχει j ώστε $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ και έχουμε το ζητούμενο.

□

Κίνητρο 9. Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{h}_k$ είναι πεπερασμένη. Για να αποδειχθεί αυτό όμως πρέπει να αποδείξουμε μια σειρά από βοηθητικά λήμματα. Παρόλα αυτά, αν για την ώρα υποθέσουμε ότι ο παραπάνω ισχυρισμός είναι σωστός, μπορούμε να δείξουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Πρόταση 23. Έστω A ακέραιο ιδεώδες του K, για το οποίο υπάρχει m φυσικός αριθμός ώστε A^m να είναι κύριο με $(m, \mathfrak{h}_K) = 1$. Τότε, το A είναι κύριο.

Απόδειξη. Υπάρχει $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $1 = xm + y\mathfrak{h}_K$. Τότε, ισχύει ότι
$$A\mathcal{H}_K = A^1\mathcal{H}_K = \left[\left(A^{\mathfrak{h}_K}\right)\right]^y \mathcal{H}_K \cdot [(A^m)]^x \mathcal{H}_K = \mathcal{H}_K.$$

□

11 Μάθημα 11

11.1 Ομάδα Κλάσεων Ιδεωδών

Λήμμα 9. Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών και $\omega_1, \ldots, \omega_n$ μια βάση ακεραιότητας του K. Τότε, υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ να ισχύει ότι

$$\left| N_{K/\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i \right) \right| \leq C \cdot \left(\max_i |x_i| \right)^n$$

Απόδειξη. Έστω $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ οι $\mathbb{Q}$ - εμφυτεύσεις του K στο $\mathbb{C}$. Τότε, ισχύει ότι

$$\left| N_{K/\mathbb{Q}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i \right) \right| = \left| \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left[x_i \sigma_j \left(\omega_i \right) \right] \right| = \prod_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \left[x_i \sigma_j \left(\omega_i \right) \right] \right|$$

$$\leq \left(\prod_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \left[\sigma_j \left(\omega_i \right) \right] \right| \right) \cdot \left(\max_i |x_i| \right)^n$$

Άρα, για $C = \prod_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \left[\sigma_j \left(\omega_i \right) \right] \right| > 0$ έχουμε το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 24. Έστω $K = \mathbb{Q}(i)$ και $\mathbb{Z}[i]$ με $\{1, i\}$ βάση ακεραιότητας του K. Αν σ_1, σ_2 οι $\mathbb{Q}$ - εμφυτεύσεις του K στο $\mathbb{Q}$, τότε $\sigma_1(i) = i$ και $\sigma_2(i) = -i$. Συνεπώς, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, έχουμε ότι

$$\left| N_{K/\mathbb{Q}}(x_1 + x_2 \cdot i) \right| = x_1^2 + x^2 \leq 2 \cdot \left(\max\{|x_1|, |x_2|\} \right)^2.$$

Πρόταση 24. Αν $C > 0$ η σταθερά του Λήμματος 9 και A μη μηδενικό ιδεώδες του $\mathcal{R}_K$, τότε υπάρχει $a \in A \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε

$$\left| N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \right| \leq C \cdot N_K(A).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \omega_i \mid x_i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x_i \leq \sqrt[n]{N_K(A)} + 1 \right\}$$

Αφού $|\mathcal{A}| = \left(\sqrt[n]{N_K(A)} + 1 \right)^n > N_K(A) = |\mathcal{R}_K / A|$, από την αρχή του περιστερώνα, υπάρχουν $\xi_1 \neq \xi_2$ στο $\mathcal{A}$ ώστε $\xi_1 - \xi_2 \in A$. Δείξτε ότι το $\alpha = \xi_1 - \xi_2$ ικανοποιεί τη ζητούμενη σχέση. □

Λήμμα 10. Έστω $C > 0$ η σταθερά του Λήμματος 9 και $c \in \mathcal{C}_K$. Τότε, υπάρχει $A \in c$ ακέραιο, τέτοιο ώστε $|N_K(A)| < C$.

Απόδειξη.

- Έστω $A' \in c^{-1}$. Τότε, υπάρχει $a \in K$ τέτοιο ώστε $aA' \subseteq \mathcal{R}_K$, συνεπώς $aA' \equiv A' \mod H_K$, άρα χ.β.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι A' είναι ιδεώδες του $\mathcal{R}_K$.
- Από την Πρόταση 24, υπάρχει $b \in A' \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $\left|N_{K/\mathbb{Q}}(b)\right| \leq C \cdot N_K(A')$.
- Ορίζουμε $A = (b \cdot \mathcal{R}_K) \cdot (A')^{-1} \in c$. Είναι άμεσο ότι $A \subseteq \mathcal{R}_K$, αφού $b \in A'$. Τώρα, από την πολλαπλασιαστικότητα της N_K, παρατηρούμε ότι

$$|N_K(A)| = \frac{|N_K(b \cdot \mathcal{R}_K)|}{|N_K(A')|} = \frac{\left|N_{K/\mathbb{Q}}(b)\right|}{|N_K(A')|} \leq C.$$

□

Λήμμα 11. Υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ακέραια ιδεώδη A με την ιδιότητα $N_K(A) \leq C$.

Απόδειξη. Αν δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ακέραια ιδεώδη A τ.ω. $N_K(A) = m$, τότε προφανώς έχουμε το ζητούμενο.

- Έστω A ακέραιο ιδεώδες με $N_K(A) = m$. Τότε, για κάθε $a \in \mathcal{R}_K$, ισχύει ότι $ma \in A$, συνεπώς $m \cdot \mathcal{R}_K \subseteq A$.
- Θέτουμε $B = m \cdot \mathcal{R}_K \cdot A^{-1}$ ακέραιο ιδεώδες του K.
- Τότε, υπάρχουν $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s \in \operatorname{Spec}(\mathcal{R}_K)$ τέτοια ώστε

$$\prod_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i^{m_i} = m \cdot \mathcal{R}_K = A \cdot B$$

  Από την μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη, υπάρχουν πεπερασμένες επιλογές για το A.

□

Πόρισμα 10. Αν $\mathfrak{h}_K = |\mathcal{C}_K| = |\mathcal{I}_K/\mathcal{H}_K|$, τότε το $\mathfrak{h}_K$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. Άμεσο από τα Λήμματα 10 και 11. □

12 Μάθημα 12

13 Μάθημα 13

13.1 Πρώτο Θεώρημα Ανάλυσης

Θεωρούμε αλγεβρικά σώματα αριθμών $K \subseteq L \subseteq M$ και τα αντίστοιχους δακτυλίους Dedekind των ακεραίων αλγεβρικών $R \subseteq S \subseteq T$. Θεωρούμε τα αντίστοιχα πρώτα ιδεώδη $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ και $\mathfrak{u} \in \mathrm{Spec}(T)$. Οι προηγούμενοι συμβολισμοί θα παραμείνουν ως αναλλοίωτοι στη συνέχεια.

Παρατήρηση 30. Παρατηρούμε ότι το $\mathfrak{p}S = \langle ps \mid p \in \mathfrak{p},\ s \in S \rangle$ είναι ιδεώδες του S. Παρότι $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο, το ιδεώδες $\mathfrak{p}S$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη πρώτο παρόλα αυτά, επειδή S είναι του Dedekind, γράφεται μοναδικά

$$\mathfrak{p}S = \mathfrak{q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_r} \tag{9}$$

όπου $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_r \in \mathrm{Spec}(S)$.

Κίνητρο 10. Παρότι υπαρξιακά γνωρίζουμε ότι το $\mathfrak{p}S$ γραφεται όπως παραπάνω, θα θέλαμε να γνωρίζούμε πλήρως ποια είναι τα ιδεώδη $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_r$ καθώς και τους αντίστοιχους εκθέτες $e_1, \ldots, e_r$.

Πρόταση 25. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(α) $\mathfrak{q} | \mathfrak{p}S$

(β) $\mathfrak{p}S \subseteq \mathfrak{q}$

(γ) $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$

(δ) $\mathfrak{p} = R \cap \mathfrak{q}$

(ε) $\mathfrak{p} = K \cap \mathfrak{q}$

Ορισμός 33. Αν ισχύει κάποια από τις παραπάνω σχέσεις, θα λέμε ότι το $\mathfrak{q}$ **βρίσκεται πάνω** από το $\mathfrak{p}$ ή ότι το $\mathfrak{p}$ **βρίσκεται κάτω** από το $\mathfrak{q}$.

Πρόταση 26. Με βάση την ισότητα 9, τα $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ είναι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του S που βρίσκονται πάνω από το $\mathfrak{p}$ στην επέκταση L/K.

Ορισμός 34. (α) Γνωρίζουμε ότι

$$\mathfrak{p}S = \prod_{\mathfrak{q}\in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{q}^{\alpha(\mathfrak{q})}$$

Ο εκθέτης $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = \alpha(\mathfrak{q})$ λέγεται **δείκτης διακλάσωσης** του $\mathfrak{q}$ υπεράνω του $\mathfrak{p}$.

(β) Αν $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) > 1$, θα λέμε ότι το $\mathfrak{q}$ **διακλαδίζεται** υπεράνω του $\mathfrak{p}$.

(γ) Θα λέμε ότι $\mathfrak{p}$ διακλαδίζεται υπέρ του L αν υπάρχει $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$, ώστε $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) > 1$.

Παρατήρηση 31. Έστω ότι $\mathfrak{q}$ είναι πάνω από το $\mathfrak{p}$. Τότε, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$. Θεωρούμε τον μονομορφισμό σωμάτων

$$i\colon R/\mathfrak{p} \to S/\mathfrak{q}, \quad r+\mathfrak{p} \mapsto r+\mathfrak{q}.$$

Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε το $R/\mathfrak{p}$ ως υπόσωμα του $S/\mathfrak{q}$.

Ορισμός 35. Αν $\mathfrak{q}$ βρίσκεται πάνω από το $\mathfrak{p}$, τότε ο ακέραιο

$$f\left(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}\right) = [S/\mathfrak{q} : R/\mathfrak{p}]$$

λέγεται **βαθμός αδράνειας** του $\mathfrak{q}$ πάνω από το $\mathfrak{q}$.

Πρόταση 27. Αν $\mathfrak{q}$ βρίσκεται πάνω από το $\mathfrak{p}$, τότε ισχύει ότι

$$N_{L/\mathbb{Q}}(\mathfrak{q}) = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})}.$$

Απόδειξη. Θυμίζει από την θεωρία πεπερασμένων σωμάτων, ότι αν $\mathbb{F}' \subseteq \mathbb{F}$ πεπερασμένα σώματα με $|\mathbb{F}'| = p^m$ και $|\mathbb{F}| = p^n$, τότε έχουμε ότι $m|n$ και μάλιστα $[\mathbb{F} : \mathbb{F}'] = n/m \in \mathbb{Z}$. Μέσω αυτή της παρατήρησης και του ορισμού της νόρμα, έχουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη. Αν $\mathfrak{u}$ βρίσκεται πάνω από το $\mathfrak{q}$ και $\mathfrak{q}$ βρίσκεται πάνω από το $\mathfrak{p}$, τότε

$$e(\mathfrak{u}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{u}/\mathfrak{q}) \cdot e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) \quad \text{και} \quad f(\mathfrak{u}/\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{u}/\mathfrak{q}) \cdot f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$$

□

Απόδειξη. Η πρώτη ισότητα προκύπτει άμεσα από την μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη. Για την δεύτερη ισότητα, το ζητούμενο προκύπτει άμεσο από την παραπάνω πρόταση και το γεγονός $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \geq 2$, αφού $\mathfrak{p} \subsetneqq R$. □

Θέωρημα 17 (Πρώτο Θεώρημα Ανάλυσης)**.** Έστω $[L:K]=n$ και $\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)$. Αν $\mathfrak{p}S=\mathfrak{q}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{q}_r^{e_r}$, $e_i=e(\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p})$ και $f_i=f(\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p})$, τότε

$$n=e_1f_1+\cdots+e_rf_r=\sum_{\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{p}} e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})\cdot f(\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p}).$$

Απόδειξη. Από την ανάλυση του $\mathfrak{p}S$, την πολλαπλασιαστικότητα την νόρμας και από την Πρόταση 27 έχουμε ότι

$$N_{L/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{p}S\right)=N_{K/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{p}\right)^{\sum_{i=1}^r e_if_i}$$

Αφού $\mathfrak{p}\subsetneq R$, τότε $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})\geq 2$, συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι $N_{L/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{p}S\right)=N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^n$.

- Αφού $\mathfrak{h}_K<\infty$, τότε υπάρχει $a\neq 0$ στο R τέτοιο ώστε $\mathfrak{p}^{\mathfrak{h}_K}=aR$. Συνεπώς, έχουμε ότι $\mathfrak{p}^{\mathfrak{h}_K}S=aS$.
- Αν δείξουμε ότι

  $$N_{L/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{p}S\right)^{\mathfrak{h}_K}=N_{L/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{p}^{\mathfrak{h}_K}S\right)=N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n\cdot\mathfrak{h}_K}$$

  τότε θα έχουμε δείξει το ζητούμενο.
- Έχουμε ότι

  $$N_{L/\mathbb{Q}}\left(\mathfrak{p}^{\mathfrak{h}_K}S\right)=N_{L/\mathbb{Q}}\left(aS\right)=\left|N_{L/\mathbb{Q}}\left(a\right)\right|$$

  Από τις Προτάσεις 11,12 προκύπτει ότι

  $$\left|N_{L/\mathbb{Q}}\left(a\right)\right|=\left|N_{K/\mathbb{Q}}\left(N_{L/K}(a)\right)\right|=\left|N_{K/\mathbb{Q}}(a)^n\right|=N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n\cdot\mathfrak{h}_K}.$$

□

Παράδειγμα 25. Έστω L τετραγωνικό σώμα αριθμών ($K=\mathbb{Q}$) και $[K:\mathbb{Q}]=2$. Τότε, έχουμε ότι $R=\mathbb{Z}$. Θεωρούμε πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}=p\mathbb{Z}$ του R. Από το Πρώτο Θεώρημα Ανάλυση έχουμε ότι οι πιθανές αναλύσεις του $\mathfrak{p}S$ σε πρώτα ιδεώδη είναι

$$\mathfrak{p}S=\begin{cases}\mathfrak{q}, & f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})=2,\ e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})=1\\ \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2, & f(\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p})=1,\ e(\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p})=1\\ \mathfrak{q}^2, & f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})=1,\ e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})=2\end{cases}$$

13.2 Νόμος ανάλυσης σε επεκτάσεις Galois

Πρόταση 28. Έστω σ ένας K αυτομορφισμός του L. Υποθέτουμε ότι $\mathfrak{q}$ βρίσκεται πάνω από το $\mathfrak{p}$. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Το $\sigma(\mathfrak{q})$ είναι πρώτο ιδεώδες του S.

(β) $\mathfrak{p} \subseteq \sigma(\mathfrak{q})$

(γ) $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = f(\sigma(\mathfrak{q})/\mathfrak{p})$

(δ) $e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = e(\sigma(\mathfrak{q})/\mathfrak{p})$

Απόδειξη. Δείχνοντας ότι $\sigma(S) \subseteq S$ έχουμε ότι $\sigma(S) = S$ (κάνοντας το ίδιο για την σ^{-1}. Συνεπώς, $\sigma|_S \colon S \to S$ είναι ένας K - αυτομορφισμός του S.

(α) Από την παραπάνω παρατήρηση είναι σαφές ότι $\sigma(\mathfrak{q})$ είναι ιδεώδες του S. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\tilde{\sigma} \colon \frac{S}{\mathfrak{q}} \to \frac{S}{\sigma(\mathfrak{q})}, \quad s + \mathfrak{q} \mapsto \sigma(s) + \sigma(\mathfrak{q}).$$

η οποία είναι ισομορφισμός δακτυλίων. Συνεπώς, έχουμε ότι $\sigma(\mathfrak{q})$ πρώτο.

(β) Έχουμε ότι

$$\sigma(\mathfrak{q}) \cap K = \sigma(\mathfrak{q} \cap K) = \sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$$

όπου οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν γιατί σ είναι K - αυτομορφισμός.

(γ) Από τον παραπάνω ισομορφισμό προκύπτει άμεσα και το ζητούμενο.

(δ) Αν $\mathfrak{p}S = \mathfrak{q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_r}$, τότε αφού $\sigma(\mathfrak{p}S) = \mathfrak{p}S$, έχουμε ότι

$$\mathfrak{p}S = \mathfrak{q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_r} = \sigma(\mathfrak{q})_1^{e_1} \cdots (\mathfrak{q}_r)^{e_r} = \sigma(\mathfrak{p}S)$$

Από την μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη έχουμε το ζητούμενο.

□

Θέωρημα 18. Έστω L/K επέκταση Galois και $G = \mathrm{Gal}(K/L)$. Αν

$$\mathfrak{p}S = \mathfrak{q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_r}$$

τότε η G δρα μεταβατικά στο $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r\}$. Δηλαδή, για κάθε $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j$, υπάρχει $\sigma \in G$ ώστε $\mathfrak{q}_j = \sigma(\mathfrak{q}_i)$.

Απόδειξη. Έστω, προς άτοπο, ότι υπάρχουν $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j$ τέτοια ώστε $\mathfrak{q}_j \notin \{\sigma(\mathfrak{q}_i \mid \sigma \in G\}$. Από αυτό το γεγονός, προκύπτει ότι τα ιδεώδη $\mathfrak{q}_j, \sigma(\mathfrak{q}_i)$ (για κάθε $\sigma \in G$) είναι σχετικά πρώτα, άρα από το Κινέζικο Θεώρημα Υπολοίπων, το σύστημα

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \mod \mathfrak{q}_j \\ x &\equiv 1 \mod \sigma(\mathfrak{q}_i), \quad \text{για κάθε } \sigma \in G \end{aligned}$$

έχει λύση $s \in S$. Συνεπώς, αφού $s \in S$, έχουμε ότι

$$N_{L/K}(s) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(s) \in K \cap S = R.$$

Αφού $s \equiv 0 \mod \mathfrak{q}_j$, τότε $s \in \mathfrak{q}_j$, συνεπώς από την Παρατήρηση 28 $N_{L/K}(s) \in \mathfrak{q}_j \cap R = \mathfrak{p}$. Από τις σχέσεις $s \equiv 1 \mod \sigma(\mathfrak{q}_i)$, για κάθε $\sigma \in G$ έχουμε ότι $\sigma(s) = s \notin \mathfrak{q}_i$. Επομενως,

$$N_{L/K}(s) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(s) \notin \mathfrak{q}_i \cap K = \mathfrak{p}$$

και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. □

Πόρισμα 11. Αν L/K επέκταση Galois, τότε για κάθε $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ισχύει ότι

$$\mathfrak{p}S = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r)^e$$

όπου $e = e(\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p})$ και $f = (\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p})$, για κάθε $i = 1, \ldots, r$. Επιπλέον, $n = efr$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται άμεσα από την Πρόταση 28, το παραπάνω Θεώρημα και τον Πρώτο Νόμο Ανάλυσης. □

13.3 Τάξεις Σωμάτων

Κίνητρο 11. Το πρώτο θεώρημα ανάλυσης μας δίνει πληροφορίες σχετικά με τους βαθμούς διακλάδωσεις και αδράνειας, αλλά δεν δίνει καμία πληροφορία σχετικά με το ποια είναι τα ιδεώδη που εμφανίζονται στην ανάλυση του $\mathfrak{p}S$. Αυτό το κενό έρχεται να καλυφθεί το δεύτερο θεώρημα ανάλυσης.

Ορισμός 36. Έστω L αλγεβρικό σώμα αριθμών με $n = [L : \mathbb{Q}]$ και $\mathcal{O} \subseteq L$. Το $\mathcal{O}$ θα λέγεται **τάξη** του L, αν ισχύουν τα παρακάτω :

(α) Το $\mathcal{O}$ είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα τάξης n.

(β) Το $\mathcal{O}$ είναι υποδακτύλιος του L με $1 \in \mathcal{O}$.

Παρατήρηση 32. Έστω $\mathcal{O}$ τάξη του L. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) $\mathcal{O} \subseteq S$, όπου S ο δακτύλιος των ακεραίων αλγεβρικών αριθμών του L.

(β) $[S : \mathcal{O}] = m < \infty$

(γ) $mS \subseteq \mathcal{O}$

Απόδειξη. (α) Έστω $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ μια βάση του $\mathcal{O}$ και $s \in \mathcal{O}$. Τότε, υπάρχει $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ ώστε να ισχύουν τα παρακάτω :

$$s \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - sI_n) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = 0.$$

Αφού το σύστημα $(A - sI_n)X = 0$ έχει μη μηδενική λύση, τότε $\det(A - sI_n) = 0$, συνεπώς $s \in \mathcal{O}$ είναι ακέραιος αλγεβρικός.

(β) Αφού $\mathcal{O} \subseteq S$ και $\mathcal{O}, S$ είναι ελεύθερες αβελιανές τάξης n, τότε $[S : \mathcal{O}] = m < \infty$.

(γ) Άμεσο από το (β).

□

Παρατήρηση 33. Έστω $K \subseteq L$ σώματα και R, S οι αντίστοιχοι δακτύλιοι των ακεραίων αλγεβρικών. Αφού L/K είναι διαχωρίσιμη, υπάρχει $\vartheta \in S$ τ.ω. $L = K(\vartheta)$. Θα δείξουμε ότι $S^* = R[\vartheta]$ είναι τάξη του L.

- Γνωρίζουμε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση

  $$R[\vartheta] \subseteq S \subseteq D_K(\vartheta)^{-1} \cdot R[\vartheta]$$

  Αφού S είναι ελεύθερη αβελιανή βαθμού n και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις περιέχεσθαι

  $$D_K(\vartheta) \cdot S \subseteq R[\vartheta] \subseteq S$$

  όπως και στην Πρόταση 15, προκύπτει ότι $R[\vartheta]$ είναι ελεύθερη αβελιανή βαθμού n.

- Γνωρίζουμε ότι $R[\vartheta]$ είναι υποδακτύλιος τους S με $1 \in R[\vartheta]$.

Ορισμός 37. Έστω S^* μια τάξης του αλγεβρικού σώματος L, όπου S είναι ο δακτύλιος των ακέραιων αλγεβρικών αριθμών του L. Ο **οδηγός** τάξης S^* ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{S/S^*} = \{\xi \in S^* \mid \xi \cdot S \subseteq S^*\}$$

14 Μάθημα 14

14.1 Τάξεις και Οδηγοί Τάξεων

Παρατήρηση 34. Έστω S^* μια τάξης του αλγεβρικού σώματος L, όπου S είναι ο δακτύλιος των ακέραιων αλγεβρικών αριθμών του L. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Το $\mathcal{F}$ είναι ιδεώδες του S.

(β) Αν $m = [S : S^*]$, τότε $mS \subseteq \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 26. Έστω $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, όπου d είναι ελεύθερο τετραγώνου. Έχουμε δείξει ότι $S = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$, όπου

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d}, & d \equiv 2, 3 \mod 4 \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & d \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

Θα χαρακτηρίσουμε πλήρως τις τάξεις του K. Έστω S^* τάξη του K, άρα είναι ελεύθερη αβελιανή τάξης 2 και $1 \in S^*$.

- Έστω $\{\omega_1, \omega_2\}$ μια βάση της S^*. Τότε, έχουμε ότι

  $$\omega_1 = x_1 + y_1\omega \quad \text{και} \quad \omega_2 = x_2 + y_2\omega$$

  Έχουμε ότι $1 \in S^*$, συνεπώς υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ τ.ω.

  $$1 = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \Rightarrow n_1x_1 + n_2x_2 = 1 \quad \text{και} \quad n_1y_1 + n_2y_2 = 0$$

- Θεωρούμε τον πίνακα

  $$A = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

  Αν $\omega' = -x_2\omega_1 + x_1\omega_2$, παρατηρήστε ότι $\{1, \omega'\}$ είναι μια βάση της S^*, διότι

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

  και A είναι unimodular από την παραπάνω σχέση.

- Επίσης, υπάρχει μονασήμαντα ορισμένος πίνακας B τ.ω.

  $$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Από την Πρόταση 14, προκύπτει ότι $m = [S : S^*] = \pm \det B$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega' \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -\det B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Επομένως, $\omega' = a \pm m\omega$, από όπου προκύπτει ότι $S^* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(m\omega)$. Προφανώς, και αντίστροφα κάθε $S^* = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(m\omega)$, όπου $m \in \mathbb{N}$ είναι τάξη του K. Άρα, οι τάξεις του K είναι 1-1 και επί αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς.

Πρόταση 29. Έστω S^* τάξη του L με οδηγό $\mathcal{F}$. Τότε τα σύνολα

$$D_S(\mathcal{F}) = \{A \mid \ A \text{ ακέραιο ιδεώδες του } S,\ A + \mathcal{F} = S\}$$

και

$$D_{S^*}(\mathcal{F}) = \{A^* \mid \ A^* \text{ ακέραιο ιδεώδες του } S^*,\ A^* + \mathcal{F} = S^*\}$$

είναι πολλαπλασιαστικές ημιομάδες που ισχύει ο νόμος της διαγραφής.

Απόδειξη.

- Αρχικά θα δείξουμε ότι $D_S(\mathcal{F})$ είναι πολλαπλασιαστική ημιομάδα. Έστω $A, B \in D_S(\mathcal{F})$, δηλαδή $A + \mathcal{F} = A + \mathcal{F} = S$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $AB + \mathcal{F} = S$. Ο νόμος διαγραφής ισχύει, αφού ο S είναι δακτύλιος του Dedekind και άρα κάθε μη μηδενικό ιδεώδες αντιστρέφεται.
- Όπως παραπάνω, προκύπτει άμεσα ότι $D_{S^*}(\mathcal{F})$ είναι ημιομάδα. Ο νόμος διαγραφής προκύπτει από το αποτέλεσμα του παρακάτω θεωρήματος, όπου θα δείξουμε ότι $D_S(\mathcal{F})$ και $D_{S^*}(\mathcal{F})$ είναι ισόμορφες ως ημιομάδες.

□

Υπενθύμιση 4. (α) Έστω A, B, C προσθετικές υποομάδες μιας $(G, +)$. Αν $A \subseteq C$, τότε $(A + B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(β) Αν A, B ιδεώδη δακτυλίου R τ.ω. $A + B = S$, τότε $AB = A \cap B$.

Θέωρημα 19. Έστω S^* τάξη του L με οδηγό $\mathcal{F}$. Ισχύουν τα ακόλουθα.

(α) Η απεικόνιση $i \colon D_{S^*}(\mathcal{F}) \to D_S(\mathcal{F})$ με $i(A^*) = SA^*$ είναι ισομορφισμός ημιομάδων με αντίστροφη

$$j \colon D_S(\mathcal{F}) \to D_{S^*}(\mathcal{F}), \quad j(A) = A \cap S^*$$

(β) Για κάθε $A \in D_S(\mathcal{F})$ ισχύει ότι $S/A \cong S^*/A^*$, όπου $A^* = A \cap S^*$.

Απόδειξη. (α) • Αρχικά πρέπει να δείξουμε ότι η i είναι καλά ορισμένη. Έστω $A^* \in D_{S^*}(\mathcal{F})$, δηλαδή $A^* + \mathcal{F} = S^*$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$SA^* + S\mathcal{F} = SS^*$$
$$SA^* + \mathcal{F} + S$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί $\mathcal{F}$ είναι ιδεώδες του S και $1 \in S^*$.

- Είναι άμεσο ότι η i είναι ομομορφισμός ημιομάδων.
- Για να δείξουμε ότι i είναι μονομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι έχει αριστερή αντίστροφο την j. Δηλαδή, θα δείξουμε ότι

$$j \circ i\,(A^*) = A^* \Leftrightarrow (SA^*) \cap S^* = A^*$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & (SA^*) \cap S^* = (SA^*) \cap (A^* + \mathcal{F}) = A^* + SA^* \cap \mathcal{F} = A^* + SA^*\mathcal{F} \\ = \;& A^* + A^*\mathcal{F} = A^*\,(S^* + \mathcal{F}) = A^*S^* = A^* \end{aligned}$$

- Θα δείξουμε ότι i είναι επιμορφισμός, δείχνοντας ότι έχει δεξιά αντίστροφο την j. Δηλαδή θα δείξουμε ότι

$$i \circ j(A) = A \Leftrightarrow S\,(S^* \cap A) = A$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & S\,(S^* \cap A) = (A + \mathcal{F})\,(S^* \cap A) = A \cdot (S^* \cap A) + \mathcal{F} \cdot (S^* \cap A) \\ = \;& A \cdot (S^* \cap A) + \mathcal{F} \cap A = A \cdot (S^* \cap A) + \mathcal{F} \cdot A = A \cdot (S^* \cap A + \mathcal{F}) = AS^* = A \end{aligned}$$

(β) Θεωρούμε την $\varphi\colon S^*/A^* \to S/A$ με $\varphi(s + A^*) = s + A$. Η φ είναι άμεσα μονομορφισμός και επί προκύπτει από το γεγονός $A + \mathcal{F} = S$.

□

14.2 Δεύτερο Θεώρημα Ανάλυσης

Παρατήρηση 35. • Έστω $K \subseteq L$ αλγεβρικά σώματα αριθμών, R, S οι αντίστοιχοι δακτύλιοι ακεραίων αλγεβρικών με $L = K(\vartheta)$, όπου $\vartheta \in S$. Έστω $\mathcal{F}$ ο οδηγός της τάξης $R[\vartheta]$ και $g(x) = \mathrm{Irr}(\vartheta, K) \in R[x]$ (αφού $\vartheta \in S$).

- Θεωρούμε $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ τ.ω. $\mathfrak{p}S + \mathcal{F} = S$. Αφού $\mathfrak{p}$ είναι μέγιστο, τότε $R/\mathfrak{p}$ είναι σώμα, επομένως $(R/\mathfrak{p})\,[x]$ είναι Π.Κ.Ι., επομένως και Π.Μ.Π.

- Συνεπώς, το αντίστοιχο πολυώνυμο $\overline{g}(x) \in (R/\mathfrak{p})[x]$ γράφεται στην μορφή

$$\overline{g}(x) = \overline{g_1}(x)^{c_1} \cdots \overline{g_t}(x)^{c_t}.$$

όπου $g_i(x) \in R[x]$ είναι μονικά και $\overline{g_i}(x) \in (R/\mathfrak{p})[x]$ είναι ανάγωγα.

- Έστω $\mathfrak{p}S = \mathfrak{q}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_r}$, η ανάλυση του $\mathfrak{p}S$ σε πρώτα ιδεώδη. Θα δείξουμε ότι με τις παραπάνω υποθέσεις μπορούμε να βρούμε ακριβώς ποια είναι τα $\mathfrak{q}_i$ καθώς και τους αντίστοιχους βαθμούς διακλάδωσης και αδράνειας.

Θέωρημα 20 (Δεύτερο Θεώρημα Ανάλυσης)**.** Με τις παραπάνω υποθέσεις ισχύουν τα παρακάτω.

(α) Το πλήθος των ιδεωδών $\mathfrak{q}_i$ στην ανάλυση του $\mathfrak{p}S$ είναι ίσο με $r = t$. Επίσης

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}S + g_i(\vartheta) \cdot S \quad i = 1, \ldots, t$$

με $f_i = \deg(g_i(x))$ και $e_i = c_i$.

(β) Τα ιδεώδη $\mathfrak{q}_k^* = i^{-1}(\mathfrak{q}_k)$ δίνονται από την σχέση

$$\mathfrak{q}_k^* = \mathfrak{q}_k \cap R[\vartheta] = \mathfrak{p}[\vartheta] + g_i(\vartheta) \cdot R[\vartheta]$$

15 Μάθημα 15

15.1 Αποδείξη του Δεύτερου Θεωρήματος Ανάλυσης

Σημείωση 2. Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα χρειάζεται να αναφέρουμε μια σειρά από λήμματα. Με τις παραπάνω υποθέσεις θα συμβολίζουμε με $\overline{R} = R/\mathfrak{p}$ και για $f(x) = \sum_i a_i x^i$ θα συμβολίζουμε με $\overline{f}(x) = \sum_i \overline{a_i} x^i$.

Λήμμα 12. (α) Αν $m = [S : R[\vartheta]]$ και $\mathfrak{p} + mR = R$, τότε $\mathfrak{p}S + \mathcal{F} = S$.

(β) Αν $\mathfrak{p} \not| D_{K/L}(\vartheta) \cdot R$, τότε $\mathfrak{p}S + \mathcal{F} = S$.

Απόδειξη. (α) Έχουμε ότι $mS \subseteq R[\vartheta]$. Συνεπώς, από την Παρατήρηση 34, έχουμε ότι

$$S = S(\mathfrak{p} + mR) = \mathfrak{p}S + mS \subseteq \mathfrak{p}S + \mathcal{F}$$

και έτσι έχουμε τη ζητούμενη ισότητα.

(β) Αφού $\mathfrak{p} \not| D_{K/L}(\vartheta) \cdot R$, τότε $\mathfrak{p} + D_{K/L}(\vartheta) \cdot R = R$. Επίσης, αφού $D_{L/K}(\vartheta) \cdot S \subseteq R[\vartheta]$, τότε $D_{L/K}(\vartheta) \cdot S \subseteq \mathcal{F}$ και ομοία με το (α) έχουμε το ζητούμενο.

□

Λήμμα 13. Ισχύει ότι

$$R[\vartheta]/\mathfrak{p}[\vartheta] \cong \overline{R}[x]/\left\langle \overline{g}(x) \right\rangle$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\varphi \colon R[\vartheta] \to \overline{R}[x]/\left\langle \overline{g}(x) \right\rangle, \quad \varphi\left(h(\vartheta)\right) = \overline{h}(x) + \left\langle \overline{g}(x) \right\rangle$$

είναι καλά ορισμένος επιμορφισμός δακτυλίων με πυρήνα $\mathfrak{p}[\vartheta]$. □

Λήμμα 14 (Θεώρημα Αντιστοιχίας Ιδεωδών)**.** Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και I ιδεώδες του R. Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία των (πρώτων, μέγιστων) ιδεωδών του R που περιέχουν το I με τα (πρώτα, μέγιστα) ιδεώδη του R/I.

Απόδειξη. Προφανώς, αν $I \subseteq J$ ιδεώδες του R, τότε J/I ιδεώδες του R. Αντίστροφα, μέσω της προβολής $\pi \colon R \to R/I$, αν $\overline{J} \subseteq R/I$ ιδεώδες, τότε γνωρίζουμε ότι $J = \pi^{-1}(\overline{J})$ ιδεώδες που περιέχει το I και μάλιστα $J/I = \overline{J}$. Η περίπτωση των πρώτων και μέγιστων ιδεωδών αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση 36. Έστω $\tilde{R}$ ένας δακτύλιος κύριων ιδεωδών. Θεωρούμε $a \in \tilde{R} \setminus \{0\}$. Τότε το a γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$a = p_1^{c_1} \cdots p_t^{c_t}$$

όπου $p_1, \ldots, p_t \in \tilde{R}$ ανάγωγα.

- Σε κάθε δακτύλιο κύριων ιδεωδών, ένα ιδεώδες είναι πρώτο αν και μόνο αν παράγεται από ανάγωγο στοιχείο. Έτσι έχουμε ότι

  $$aR = \mathfrak{p}_1^1 \cdots \mathfrak{p}_t^{c_t}$$

  όπου $\mathfrak{p}_i = \langle p_i \rangle$ τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη που βρίσκονται πάνω από το aR.

- Από το παραπάνω λήμμα, είναι σαφές ότι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του R/aR είναι τα $\mathfrak{p}_i/aR$, για κάθε $i = 1, \ldots, t$.

Απόδειξη *(Δεύτερου Θεωρήματος Ανάλυσης).*

- Από την παραπάνω παρατήρηση έχουμε ότι τα ιδεώδη $\langle \overline{g_i}(x) \rangle / \langle \overline{g}(x) \rangle$ είναι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του $\overline{R}[x]/\langle \overline{g}(x) \rangle$.

- Μέσω του επαγόμενου ισομορφισμού ρ του Λήμματος 13, έχουμε ότι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του $R[\vartheta]/\mathfrak{p}[\vartheta]$ είναι τα

$$\rho^{-1}\left(\overline{g_i}(x)/\langle \overline{g}(x) \rangle\right) = \frac{g_i(\vartheta) \cdot R[\vartheta] + \mathfrak{p}[\vartheta]}{\mathfrak{p}[\vartheta]}$$

- Από το Θεώρημα Αντιστοιχίας Ιδεωδών, τότε τα $g_i(\vartheta) \cdot R[\vartheta] + \mathfrak{p}[\vartheta]$ είναι τα μοναδικά πρώτα ιδεώδη του $R[\vartheta]$ που περιέχουν το $\mathfrak{p}[\vartheta]$, για κάθε $i = 1, \ldots, t$.

- Αφού $\mathfrak{p}[\vartheta] = \mathfrak{p}S \cap R[\vartheta]$, μέσω της απεικόνισης i που ορίστηκε στο Θεώρημα 19, έχουμε ότι $r = t$ και ότι τα μοναδικά ιδεώδη που βρίσκονται πάνω από το $\mathfrak{p}S$ είναι τα

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}S + g_i(\vartheta)(S)$$

  Μέσω της παραπάνω σχέσης έχουμε δείξει το πρώτο σκέλους του ερωτήματος (α), καθώς και το ερώτημα (β).

- Θα δείξουμε ότι $f_i = f\left(\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p}\right) = \deg(g_i(x))$. Έχουμε ότι

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{f_i} = |R/\mathfrak{p}|^{f_i} = |S/\mathfrak{q}_i| = |R[\vartheta]/\mathfrak{q}_i^*| = |R[\vartheta]/\left(g_i(\vartheta) \cdot S + \mathfrak{p}[\vartheta]\right)|$$

  όπου η τρίτη ισότητα έπεται από το Θεώρημα 19 (β). Από το Λήμμα 13 έχουμε ότι

$$|R[\vartheta]/\left(g_i(\vartheta) \cdot S + \mathfrak{p}[\vartheta]\right)| = \left| \frac{R[\vartheta]/\mathfrak{p}[\vartheta]}{\left(g_i(\vartheta) \cdot S + \mathfrak{p}[\vartheta]\right)/\mathfrak{p}[\vartheta]} \right| = \left| \frac{\overline{R}[x]/\langle \overline{g}(x) \rangle}{\langle \overline{g_i}(x) \rangle / \langle \overline{g}(x) \rangle} \right| = \left| \frac{\overline{R}[x]}{\langle \overline{g_i}(x) \rangle} \right|$$

  Αφού τα $g_i(x)$ επιλέχθησαν έτσι ώστε $\deg(g_i(x)) = \deg\left(\overline{g_i}(x)\right)$, τότε έχουμε ότι

$$\left| \frac{\overline{R}[x]}{\langle \overline{g_i}(x) \rangle} \right| = \left|\overline{R}\right|^{\deg(g_i(x))} = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{\deg(g_i(x))}$$

  Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε το ζητούμενο.

- Αρχικά θα δείξουμε ότι $\prod_{i=1}^{t} \mathfrak{q}_i^{c_i} \subseteq \mathfrak{p}S$. Από ιδιότητες διαιρετότητας και την μοναδικότητα της ανάλυσης σε πρώτα ιδεώδη, θα ισχύει ότι $e_i \leq c_i$. Έχουμε ότι

$$\prod_{i=1}^{t} \mathfrak{q}_i^{c_i} = \mathfrak{p}S + \left(\prod_{i=1}^{t} g_i(\vartheta) \right) S$$

  Αν δείξουμε ότι $\left(\prod_{i=1}^{t} g_i(\vartheta)\right) S \subseteq \mathfrak{p}S$ θα έχουμε δείξει το ζητούμενο. Από την σχέση

$$\overline{g}(x) = \overline{g_1}(x)^{c_1} \cdots \overline{g_t}(x)^{c_t}.$$

έχουμε ότι

$$\left(\prod_{i=1}^{t} g_i(\vartheta)\right) = \left(\prod_{i=1}^{t} g_i(\vartheta)\right) - g(\vartheta) \in \mathfrak{p}[\vartheta]$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\left(\prod_{i=1}^{t} g_i(\vartheta)\right) S \subseteq S \cdot \mathfrak{p}[\vartheta] = \mathfrak{p}S.$$

- Τέλος, παρατηρήστε ότι

$$[L : K] = n = \deg(g(x)) = \sum_{i=1}^{t} \deg\left(g_i(x)\right) \cdot c_i = \sum_{i=1}^{t} f_i c_i \leq \sum_{i=1}^{f} f_i e_i = n$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το πρώτο θεώρημα ανάλυσης. Αφού ισχύει ότι $f_i \geq 0$ και $c_i \leq e_i$, τελικώς από την παραπάνω ισότητα έχουμε ότι $c_i \leq e_i$, για κάθε $i = 1, \ldots, t$.

□

References

[Antoniadis, 2021] Antoniadis, K. (2021). An introduction to algebraic number theory. *Algebraic Number Theory*.

[Fulton, 2008] Fulton, W. (2008). Algebraic curves. *An Introduction to Algebraic Geom*, 54.

[Scott, 2015] Scott, G. (2015). Algebra notes. *Ideals and the Chinese Remainder Theorem*.