• **Αρμονική Ανάλυση:** Μάθημα 1ο: Σχολιογιάννης.

$(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)=\{f:X\to\mathbb{K} \mid f \text{ μετρήσιμη και } \int|f|^p d\mu<+\infty\}$

όπου: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

– Ο $\mathcal{L}^p$ είναι γραμμικός χώρος γιατί:

Αν $f,g:X\to\mathbb{K}$ μετρήσιμες με $\int|f|^p d\mu<+\infty$ και $\int|g|^p d\mu<+\infty$ και τότε: $f+g$ είναι μετρήσιμη και $|f+g|^p\leq(|f|+|g|)^p\leq(2\max\{|f|,|g|\})^p=2^p\max\{|f|^p,|g|^p\}$ $\leq 2^p(|f|^p+|g|^p)$ και άρα: $\int|f+g|^p d\mu\leq 2^p\left(\int|f|^p d\mu+\int|g|^p d\mu\right)<+\infty$

και επίσης προφανώς έχουμε ότι αν $c\in\mathbb{K}$ τότε: $|cf|^p=|c|^p|f|^p$ και άρα έχουμε ότι: $\int|cf|^p d\mu=|c|^p\int|f|^p d\mu<+\infty$ και η cf είναι μετρήσιμη και άρα ο $\mathcal{L}^p$ είναι γραμμικός χώρος.

– Ορίζουμε $\|f\|_p=\left(\int|f|^p d\mu\right)^{1/p}$ για κάθε $f\in\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$

• **Παρατήρηση:** η $\|\cdot\|_p$ που $\mathcal{L}^p$ δεν είναι νόρμα γιατί υπάρχουν $f\neq 0$ τέτοιες ώστε: $\int|f|^p d\mu=0$ (είναι ημινόρμα). Ταυτίζοντας όμως αυτές τις συναρτήσεις με το μηδέν παίρνουμε χώρο με νόρμα. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας που $\mathcal{L}^p$: $f\sim g \Leftrightarrow \|f-g\|_p=0$ $\Leftrightarrow f=g$ μ-σχεδόν παντού και ονομάζουμε $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ τον χώρο πηλίκο. Στον L^p ορίζουμε: $[f]+[g]=[f+g]$ και $c\cdot[f]=[cf]$ και οι πράξεις αυτές είναι καλά ορισμένες και ο L^p γίνεται γραμμικός χώρος. Στο εξής θα γράφουμε f αντί για $[f]$ για τα στοιχεία του L^p

– Στον L^p η $\|\cdot\|_p$ ορίζει νόρμα:

1. $\|f\|_p\geq 0$ και $\|f\|_p=0 \Rightarrow |f|=0$ μ-σχ.π $\Rightarrow f\overset{L^p}{=}0$
2. $\|cf\|_p=|c|\|f\|_p$, $\forall c\in\mathbb{K}$
3. $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$ (Ανισότητα Minkowski)

• Η ανισότητα Minkowski είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder:

$\int|f\cdot g|\,d\mu\leq\|f\|_p\|g\|_q$ με $p,q>1$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

• **Θεώρημα:** ο χώρος $L^p(X,A,\mu)$ με την νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι χώρος Banach, δηλαδή η μετρική που επάγεται από την νόρμα είναι πλήρης.

• **Λήμμα:** Έστω X χώρος με νόρμα. ΤΑΕΙ:

1. Ο X είναι πλήρης χώρος με νόρμα
2. Αν $(x_n)_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία του X τέτοια ώστε: $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|<\infty$, τότε $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει του X

- **Απόδειξη:** • Έστω αρχικά ότι ο X είναι πλήρης και έστω και $(x_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία τέτοια ώστε: $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|<+\infty$ και αν τώρα: $S_n=\sum_{m=1}^n x_m$, $n\in\mathbb{N}$ τότε παρατηρούμε ότι:

Ισχυρισμός: η $(S_n)_{n=1}^\infty$ είναι βασική: Πράγματι: $\|S_n-S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^n x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^n \|x_k\|$ αν $n>m$ του $\mathbb{N}$ και έχουμε τώρα ότι αφού: $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|<\infty$ έπεται ότι δοθέντος $\varepsilon>0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $\sum_{n\ge n_0(\varepsilon)}^\infty \|x_n\|<\varepsilon$ και άρα: $\forall n>m > n_0(\varepsilon)$:
$\|S_n-S_m\| \le \sum_{k=n_0(\varepsilon)}^\infty \|x_k\| < \varepsilon$ και άρα η $(S_n)_{n=1}^\infty$ είναι βασική ακολουθία του X και αφού αυτός είναι πλήρης έπεται ότι η $(S_n)_{n=1}^\infty$ είναι συγκλίνουσα και άρα η $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλίνει και έχουμε το 1ο ζητούμενο.

• Αντίστροφα έστω ότι ισχύει η (2). και τότε έχουμε ότι: αν πάρουμε μια $(x_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία του X η οποία είναι βασική, τότε παρατηρούμε ότι θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι συγκλίνουσα.
Έχουμε ότι αφού η $(x_n)_{n=1}^\infty$ είναι βασική έπεται ότι: $\forall k\in\mathbb{N}: \exists n_k\in\mathbb{N}: \|x_n-x_m\| < \frac{1}{2^k}$ $\forall n,m\ge n_k$ και μάλιστα μπορούμε να διαλέξουμε τα n_k ώστε: $n_1<n_2<\dots\dots$
Τώρα έχουμε ότι: $\sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\| \le \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}<\infty$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι από την υπόθεση έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=x$ συγκλίνει στο X και άρα:
$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^j (x_{n_{k+1}}-x_{n_k})=x$ και αφού έχουμε ότι: το άθροισμα μέσα στο όριο είναι τηλεσκοπικό

έπεται ότι: $\lim_{j\to\infty}(x_{n_{j+1}}-x_{n_1})=x \Rightarrow \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} = x+x_{n_1}$ και άρα η $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία και αφού είναι υπακολουθία της βασικής ακολουθίας $(x_n)_{n=1}^\infty$, έπεται από θεώρημα ότι και η $(x_n)_{n=1}^\infty$ συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο: $x_{n_1}+x$.

- <u>Απόδειξη Θεωρήματος:</u>

Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία στον L^p με $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < +\infty$. Θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < +\infty$ στον L^p και άρα από το λήμμα θα έχουμε ότι ο $(L^p, \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach. Ορίζουμε τώρα: $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ και $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$, $n \in \mathbb{N}$. Από την ανισότητα Minkowski έχουμε ότι: $\|\sigma_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p$ και άρα έχουμε ότι: $\|\sigma\|_p = \left(\int \sigma^p d\mu \right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \left(\int \sigma_n^p d\mu \right)^{1/p}$ $\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p < \infty$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι: $|\sigma(x)| < \infty$ μ-σχ.π και άρα η σειρά $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει απολύτως μ-σχ.π και άρα τώρα αν: $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ τότε θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $s_n \xrightarrow{L^p} s$ [redacted] Δηλαδή: $\|s_n - s\|_p \longrightarrow 0$. Γνωρίζουμε όμως ότι: $|s_n - s|^p \xrightarrow{\mu-\sigma\chi.\pi} 0$ γιατί η $s = \sum_{n=1}^{\infty}$ [redacted] f_n συγκλίνει απολύτως μ-σχ.π και άρα οι ουρές της $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ συγκλίνουν στο 0 μ-σχ.π. Επίσης έχουμε ότι: $|s_n(x) - s(x)|^p \leq$ [redacted] $(|s_n(x)| + |s(x)|)^p \leq (2\max\{|s_n(x)|, |s(x)|\})^p \leq 2^p \max\{\sigma_n(x), \sigma(x)\}^p \leq 2^{p+1} \sigma(x)^p$ $\in L^1$ και άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι: $\|s_n - s\|_p \longrightarrow 0$

• <u>Ο χώρος $L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$</u>: $\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f: X \to \mathbb{K} \mid f$ μετρήσιμη και $\|f\|_{\infty} < \infty \}$ όπου: $\|f\|_{\infty} = \inf\{ t > 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\}) = 0 \}$ το ουσιώδες φράγμα της f.

- <u>Παρατηρήσεις:</u>

1. $\{x \in X \mid |f(x)| > t\}$ φθίνοντα καθώς το t αυξάνει και άρα από την μονοτονία του μέτρου $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Επομένως τώρα από την συνέχεια του μέτρου $\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \xrightarrow{t \downarrow t_0} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t_0\})$ και άρα έχουμε ότι: <u>$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_{\infty}\}) = 0$</u> αν πάρουμε $t \downarrow \|f\|_{\infty}$

2. $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ είναι γραμμικός χώρος:

- $\|cf\|_\infty = |c|\cdot\|f\|_\infty, \ \forall c\in\mathbb{K}$
- $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ (Minkowski για $p=\infty$)

– Καλούμε $f\sim g$ ανν $\|f-g\|_\infty=0$ ανν $f=g$ μ-σχ.π
L^∞= κλάσεις ισοδυναμίας. Ορίζουμε πράξεις στις κλάσεις ισοδυναμίας ώστε $(L^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ να είναι χώρος με νόρμα.

• Θεώρημα: Ο $L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ με την $\|\cdot\|_\infty$ είναι χώρος Banach.

– Έστω $(f_n)_{n\ge1}^\infty$ βασική ακολουθία και έστω $A_{n,m}=\{x\in X: |f_n(x)-f_m(x)|>\|f_n-f_m\|_\infty\}$ και τότε από παραπάνω παρατήρηση $\mu(A_{n,m})=0, \ \forall n,m\in\mathbb{N}$. Θέτουμε: $A=\bigcup_n\bigcup_m A_{n,m}$
Έχουμε: $\mu(A)\le\sum_{n,m}\mu(A_{n,m})=0$ και άρα: $\mu(A)=0$ και για $x\in A^c$ έχουμε ότι: $|f_n(x)-f_m(x)|\le\|f_n-f_m\|_\infty, \ \forall n,m\in\mathbb{N}$. Άρα απ' αυτό έπεται ότι $\forall x\in A^c$ έχουμε ότι η αριθμητική ακολουθία $(f_n(x))_{n\ge1}^\infty$ είναι βασική και άρα συγκλίνει. Άρα: $\forall x\in A^c$: $\exists f(x)\in\mathbb{K}$ με $f_n(x)\to f(x)$. Τώρα: $|f_n(x)-f(x)| = \lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\le\lim_{m\to\infty}\|f_n-f_m\|$ $\forall x\in A^c$. Δοθέντος ε>0 έχουμε ότι υπάρχει $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\|f_n-f_m\|<\varepsilon, \ \forall n\ge n(\varepsilon)$. Άρα: $\forall x\in A^c, \forall n\ge n(\varepsilon)$: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in A^c}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon, \ \forall n\ge n(\varepsilon)$. Έπεται επομένως ότι: $\|f_n-f\|_\infty\le\varepsilon, \ \forall n\ge n(\varepsilon)$ αφού $\mu(X\setminus A^c)=0$ και αφού το ε>0 ήταν τυχαίο έχουμε ότι: $\|f_n-f\|_\infty\to 0$.

Ορισμός: Αν $p,q>1$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ οι p,q λέγονται συζυγείς εκθέτες. Επίσης τα 1 και $+\infty$ είναι συζυγείς εκθέτες.

- <u>Αρμονική Ανάλυση:</u> Μάθημα 2ο: Συναρτησιακή

- <u>Ο Χώρος του L^p:</u>

- <u>Γραμμικοί Τελεστές:</u> X, Y γραμμικοί χώροι σε σώμα $\mathbb{K}$ με νόρμα.

$T: X \to Y$ είναι <u>γραμμική</u> αν $T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$, $\forall x,y \in X$

Μια γραμμική απεικόνιση είναι <u>φραγμένη</u> αν: υπάρχει σταθερά $C>0$ με: $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ $\forall x \in X$.

- <u>Πρόταση:</u> Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής τότε τα ΙΣΧΥΟΥΝ:

1. T συνεχής
2. T συνεχής στο 0
3. T φραγμένος

[redacted]

<u>Απόδειξη:</u> • (1) $\Rightarrow$ (2): προφανές

• (2) $\Rightarrow$ (3).: Παρατηρούμε ότι αφού ο T είναι συνεχής στο 0 έπεται ότι για $\varepsilon < 1$: $\exists \delta > 0$ ώστε: αν $\|x\| < \delta$ τότε: $\|T(x)\| < \varepsilon$. Έστω τώρα $x \in X$ και τότε αν $x \neq 0$: $\left\| x \frac{\delta}{\|x\|} \right\| \leq \delta$

$$\Rightarrow \left\| T\left(x \frac{\delta}{\|x\|} \right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|T(x\delta)\| = \frac{\delta}{\|x\|} \|T(x)\| < \varepsilon < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \frac{1}{\delta} \|x\| = C\|x\|$$

και αν x[redacted]$=0$ πάλι ισχύει η ανισότητα και έχουμε τελικά ότι ο T είναι φραγμένος.

• (3) $\Rightarrow$ (1).: Έχουμε αρχικά ότι υπάρχει $C>0$: $\forall x \in X$: $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ και θα αποδείξουμε ότι ο T είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$. ~~Έστω $x \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$~~ Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T είναι συνεχής στο 0 γιατί αν ο T είναι συνεχής στο 0 τότε αν πάρουμε $x_0 \in X$ έχουμε ότι: $\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\|$ και εύκολα αποδεικνύεται ότι ο T είναι συνεχής στο x_0. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και τότε έχουμε ότι: για $\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0$ έχουμε ότι αν $\|x\| < \delta$ τότε: $\|T(x)\| \leq C\|x\| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$ και άρα ο T είναι συνεχής στο 0.

- <u>Ορισμός:</u> Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα και $T: X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής τότε ορίζουμε την νόρμα τελεστή: $\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x \in X: \|T(x)\| \leq C\|x\|\}$

Παρατηρήσεις:

1. Ισχύει ότι: $\|T(x)\| \le \|T\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

γιατί παρατηρούμε ότι: αυτό είναι προφανές

2. $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \le 1\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1, x \in X\}$

γιατί παρατηρούμε ότι αν $x \in X$ με $\|x\| \le 1$ τότε: $\|T(x)\| \le \|T\| \|x\| \le \|T\|$

και άρα: $\sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \le 1\} \le \|T\|$. Αντίστροφα έχουμε ότι:

αν $A = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$ τότε αν $x \in X$: με $x \ne 0$: $\|T(x)\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$

$\le A\|x\|$ και άρα: $\|T\| \le A$ και άρα έχουμε την ζητούμενη ισότητα.

- **Πρόταση:** Αν X, Y είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα τότε ο χώρος $B(X,Y)$ των γραμμικών τελεστών από τον X στον Y είναι γραμμικός χώρος με νόρμα και αν ο Y είναι χώρος Banach τότε και ο $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach.

. **Απόδειξη:** Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος και παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $S, T \in B(X,Y)$ τότε έχουμε ότι: $S+T : X \to Y$ και αυτός είναι γραμμικός τελεστής γιατί: $(S+T)(ax+by) = S(ax+by) + T(ax+by) = aS(x) + bS(y) + aT(x) + bT(y)$ $= a(S(x)+T(x)) + b(S(y)+T(y)) = a(S+T)(x) + b(S+T)(y)$ και άρα είναι γραμμικός τελεστής ο $S+T$ και επίσης έχουμε ότι είναι και φραγμένος γιατί: αν $x \in X$ τότε:

$\|(S+T)(x)\| = \|S(x)+T(x)\| \le \|S(x)\| + \|T(x)\| \le \|S\|\|x\| + \|T\|\|x\| = (\|S\| + \|T\|)\|x\|$

$\overset{(1)}{=} C\|x\|$ όπου $C = \|S\| + \|T\| \in (0, \infty)$ αφού οι S, T είναι φραγμένοι και άρα τελικά $S+T \in B(X,Y)$ και τώρα έχουμε ότι: με όμοιο τρόπο αν πάρουμε $c \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X,Y)$ τότε: $cT \in B(X,Y)$ και άρα τελικά ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος. Τώρα ο $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος με νόρμα την $\|T\|$ για $T \in B(X,Y)$ γιατί: $\|T\| \ge 0$ και αν $T=0 \Rightarrow \|T\| = 0$ και επίσης ~~αν $c \in \mathbb{K}$: $\|cT\| = \inf$~~ αν $\|T\| = 0$ τότε αφού $\forall x \in X$: $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\| = 0 \Rightarrow T(x) = 0$, $\forall x \in X \Rightarrow T = 0$. Επίσης από το (1) έπεται ότι: αν $S, T \in B(X,Y)$: $\|S+T\| \le \|S\| + \|T\|$ και με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και: αν $c \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X,Y)$ τότε: $\|cT\| = |c| \|T\|$ γιατί: αν $c \in \mathbb{K}$ και $T \in B(X,Y)$ τότε: $\|cT(x)\| = |c| \|T(x)\| \le |c| \|T\| \|x\| = C\|x\|$ όπου: $C = |c|\|T\| \in (0, +\infty)$ αφού ο T είναι φραγμένος και $\|cT\| \le |c|\|T\|$. Επίσης: $\|T\| = \|c^{-1}cT\|$ $= |c|^{-1}\|cT\| \le \|T\|$ και άρα τελικά: $\|cT\| = |c|\|T\|$ και άρα είναι νόρμα.

Τώρα αν ο Y είναι χώρος Banach θα αποδείξουμε ότι και ο $B(X,Y)$ είναι Banach και έχουμε ότι αν $(T_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία του $B(X,Y)$ που είναι βασική τότε παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x\in X$: $\|T_n(x)-T_m(x)\| \leq \|T_n-T_m\|\,\|x\|$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι $\forall x\in X$ η ~~$((T_n-T_m)(x))$~~ $(T_n(x))_{n\geq 1}$ είναι βασική ακολουθία του Y και αφού αυτός είναι χώρος Banach έπεται ότι η $(T_n(x))_{n\geq 1}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του Y και άρα ορίζεται $T: X\to Y$ τέτοιος ώστε: $T(x)=\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$, $\forall x\in X$ και έχουμε ότι αυτός είναι γραμμικός τελεστής από την γραμμικότητα του ορίου και των γραμμικών τελεστών T_n. Επίσης ο T είναι και φραγμένος τελεστής γιατί έχουμε ότι αφού η $(T_n)_{n\geq 1}$ είναι βασική ακολουθία για $\varepsilon=1$ υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$: $\|T_n-T_m\|\leq 1$, $\forall n,m\geq n_1$. Θέτουμε $C=\max\{\|T_1\|,\|T_2\|,\dots,\|T_{n_1}\|+1\}$ και τότε: $\|T(x)\| =$ [redacted] $\lim\|T_n(x)\| \leq \lim\|T_n\|\,\|x\| = \|x\|\lim\|T_n\| \leq C\|x\|$ και άρα ο T είναι φραγμένος και $\|T\|\leq C$.

Τώρα: $\|T_n-T\|\to 0$: Έστω $\varepsilon>0$ και τότε έχουμε ότι $\exists\, n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$, $\forall n,m\geq n(\varepsilon)$. Για αυθαίρετο τώρα $x\in X$: $\|T_n(x)-T_m(x)\| = \|(T_n-T_m)(x)\| \leq \|T_n-T_m\|\,\|x\|$ και άρα για $n\geq n(\varepsilon)$ και $x\in X$: $\|T_n(x)-T(x)\| = \lim\limits_{m\to\infty}\|T_n(x)-T_m(x)\| \leq \lim\limits_{m\to\infty}\|T_n-T_m\|\,\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$ και άρα: $\forall n\geq n(\varepsilon)$: $\|T_n-T\|\leq\varepsilon$ και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν: $\|T_n-T\|\to 0$

- **Ορισμός**: Αν X είναι χώρος Banach τότε ο χώρος των φραγμένων τελεστών $B(X,\mathbb{K})$ είναι *ο δυϊκός χώρος του X* και συμβολίζεται με X^* και τα στοιχεία του δηλαδή οι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές $\varphi: X\to\mathbb{K}$ λέγονται *φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή*.

Νόρμα: $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : \|x\|\leq 1\}$ αν $\varphi\in X^*$.

- Αν X,Y είναι χώροι Banach και υπάρχει $T: X\to Y$, 1-1, επί και φραγμένος γραμμικός τελεστής και ο T^{-1} είναι επίσης φραγμένος τότε οι X και Y καλούνται [redacted] *ισόμορφοι*. Αν επιπλέον ο T είναι ισομετρία, τότε οι X,Y λέγονται *ισομετρικά ισόμορφοι*

• <u>Αρμονική Ανάλυση: Μάθημα 3ο:</u>

<u>Θεώρημα:</u> ο $L^p(X,\mathcal{A},\mu)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(X,\mathcal{A},\mu)$.

Αν $g\in L^q$ τότε: $\varphi_g(f)=\int fg\,d\mu$ ($f\in L^p$) ορίζει στοιχείο του $(L^p)^*$ και η απεικόνιση $T: L^q\to (L^p)^*$ με $T($[redacted]$)=\varphi_g$ είναι γραμμική ισομετρία

- <u>Απόδειξη:</u> Για τυχαίο $g\in L^q$ έχουμε ότι αν πάρουμε $f\in L^p$ τότε από την ανισότητα Hölder: $\int|fg|\,d\mu\le \|f\|_p\cdot\|g\|_q<+\infty$ και άρα η $\varphi_g: L^p\to\mathbb{K}$ είναι μια καλά ορισμένη απεικόνιση. Επίσης παρατηρούμε ότι αυτό είναι γραμμικό συναρτησοειδές γιατί αν πάρουμε $f_1,f_2\in L^p$ και $a\in\mathbb{K}$ τότε: $\varphi_g(af_1+f_2)=\int(af_1+f_2)g\,d\mu$ $=a\int f_1g\,d\mu+\int f_2g\,d\mu=a\varphi_g(f_1)+\varphi_g(f_2)$ (για τυχαίο $g\in L^q$) και άρα είναι γραμμικός τελεστής ο φ_g για τυχαίο $g\in L^q$. Επίσης για τυχαίο $g\in L^q$ έχουμε ότι η φ_g είναι και φραγμένη γιατί: $\forall f\in L^p$: [redacted] $|\varphi_g(f)|=|\int fg\,d\mu|$ $\le\int|fg|\,d\mu\le\|f\|_p\|g\|_q$ από ανισότητα Hölder και αφού: $g\in L^q\Rightarrow\|g\|_q<+\infty$ και άρα φ_g είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και: $\|\varphi_g\|\le\|g\|_q$ και άρα τελικά $\varphi_g\in(L^p)^*$, $\forall g\in L^q$, και άρα ο $T: L^q\to(L^p)^*$ με $T(g)=\varphi_g$ είναι καλά ορισμένος τελεστής και εύκολα ελέγχεται και η γραμμικότητά του.

Τώρα παρατηρούμε ότι: ο T είναι και ισομετρία γιατί έχουμε ότι: αρχικά: $\forall g\in L^q$: $\|T(g)\|=\|\varphi_g\|\le\|g\|_q$ όπως αποδείξαμε παραπάνω. Ορίζουμε τώρα: $f=|g|^{q-1}\mathrm{sgn}(g)$ και έχουμε τώρα ότι: ⊛ $|\varphi_f(g)|=|\int fg\,d\mu|=\int|g|^q\,d\mu=\|g\|_q^q$ και ⊛: $\|f\|_p=\left(\int|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}=\left(\int|g|^{p(q-1)}\,d\mu\right)^{1/p}=\left(\int|g|^q\,d\mu\right)^{1/p}=\|g\|_q^{q/p}$ και άρα έχουμε ότι: $|\varphi_g(f)|=\|g\|_q^q=\|g\|_q\cdot\|g\|_q^{q-1}=\|g\|_q\cdot\|f\|_p$ ($p/q=q-1$) και άρα: $\|\varphi_g\|\geq\|g\|_q$ και άρα τελικά: $\|\varphi_g\|=\|g\|_q=\|T(g)\|$ και ο T είναι ισομετρία. Μένει να αποδείξουμε ότι ο <u>T είναι επί:</u>

<u>1η περίπτωση:</u> $\mu(X)<+\infty$: Έστω $\varphi\in(L^p)^*$ και ορίζουμε ν: $\mathcal{A}$ [redacted] $\to\mathbb{K}$: $A\to\varphi(1_A)$ είναι μέτρο και $\nu\ll\mu$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g: X\to\mathbb{K}$ τέτοια ώστε $\nu(A)=\int_A g\,d\mu$, $\forall A\in\mathcal{A}$. Από αυτό τώρα έπεται όμως ότι: $\varphi(f)$ $=\int fg\,d\mu$ για f απλή του L^p. Πράγματι: αν $f=\sum_{i=1}^n a_i$ [redacted] 1_{A_i} τότε: $\varphi(f)$ $=\sum_{i=1}^n a_i\varphi(1_{A_i})=\sum_{i=1}^n a_i\nu(A_i)=\sum_{i=1}^n a_i\int_{A_i}g\,d\mu=\int fg\,d\mu$.

- Αποδεικνύουμε τώρα ότι $g\in L^q$:

Έχουμε ότι από θεώρημα υπάρχουν απλές μετρήσιμες $h_n \geq 0$, $h_n \leq h_{n+1}$ και $h_n \uparrow |g|$.
Ορίζουμε $f_n = h_n^{q-1}\mathrm{sgn}(g)$ απλή. Τώρα: $\varphi(f_n) = \int f_n g\, d\mu = \int h_n^{q-1}|g|\,d\mu$
$\geq \int h_n^q\, d\mu = \|h_n\|_q^q$ και επίσης έχουμε τώρα ότι: $|\varphi(f_n)| \leq \|\varphi\|\,\|f_n\|_p$
$= \|\varphi\|\,\|h_n\|_q^{q-1}$ γιατί: $\|f_n\|_p$ [redacted] $= \left(\int |f_n|^p\, d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |h_n|^{p(q-1)}\,d\mu\right)^{1/p}$
$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{q-1}{q}=\frac{1}{p} \Rightarrow p(q-1)=q\right)$ $= \left(\int |h_n|^q\, d\mu\right)^{1/p} = \|h_n\|_q^{q/p} = \|h_n\|_q^{q-1}$
$\Rightarrow \frac{q}{p} = q-1$

και άρα από τα παραπάνω έχουμε ότι: $\|h_n\|_q^q \leq \|\varphi\|\,\|h_n\|_q^{q-1} \Rightarrow \|h_n\|_q \leq \|\varphi\|$
$\forall n\in\mathbb{N}$ και αφού τώρα: ~~$|h_n|^q \uparrow |g|^q$ $h_n^q \geq 0$~~ [redacted] $h_n^q \uparrow |g|^q$ άρα: $\int |g|^q\, d\mu$
$= \lim \int h_n^q\, d\mu \leq \|\varphi\| < +\infty$ από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης γιατί: $h_n^q \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$,
$h_n^q \leq h_{n+1}^q$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $h_n^q \uparrow |g|^q$ και άρα έχουμε ότι ~~ο T είναι επί γιατί αποδει~~
$g\in L^q$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι: $\varphi(f) = \int fg\,d\mu$, $\forall f\in L^p$. Είδαμε ότι αυτό ισχύει για
$f \in L^p$ απλές. Ορίζουμε $\varphi_g(f) = \int fg\,d\mu$, $\forall f \in L^p$. Οι απλές του L^p είναι πυκνές στον L^p
και αφού οι φ και φ_g είναι συνεχείς πρέπει $\varphi = \varphi_g$ [redacted] σε όλο τον L^p και άρα:
τελικά $T(g) = \varphi_g$, $\forall g\in L^q$ είναι γραμμική ισομετρία και επί.

__2η περίπτωση:__ Αν το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο (αναφέραμε την 1η περίπτωση όπου το μέτρο μ είναι πεπερασμένο) δηλαδή: έχουμε: Έστω (X_n) ξένη ακολουθία (ξένων ανά 2 συνόλων) στην $\mathcal{A}$ με $\mu(X_n)<+\infty$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ..... (απόδειξη στις σημειώσεις).

• __Θεώρημα:__ Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε ο $L^1(\mu)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^\infty(\mu)$.

- __Απόδειξη:__ Αν $g\in L^\infty(\mu)$ τότε: $\varphi_g(f) = \int fg\,d\mu$, $\forall f\in L^1(\mu)$ ορίζει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές γιατί αρχικά: $|\varphi_g(f)| = \left|\int fg\,d\mu\right| \leq \int |fg|\,d\mu \leq$ ~~$\|f\|_\infty \int|g|\,d\mu = \|f\|_\infty\|g\|$~~
$\|g\|_\infty \int |f|\,d\mu = \|g\|_\infty\|f\|_1 < \infty$ γιατί $f\in L^1$ και $g\in L^\infty$ και άρα η φ_g είναι καλά ορισμένη και φραγμένη με: [redacted] $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty < \infty$. Η γραμμικότητα τώρα ελέγχεται όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Τώρα θεωρούμε τον τελεστή: $T: L^\infty \to (L^1)^*$ με $T(g) = \varphi_g$ και αυτός είναι καλά ορισμένος και γραμμική ισομετρία (η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα) γιατί: δοθέντος $\varepsilon>0$.

$\mu(\{x\in X \mid |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$ γιατί: αν: $\mu(\{x\in X \mid |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}) = 0$ τότε: $\|g\|_\infty \leq \|g\|_\infty - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < 0$ άτοπο. Τώρα επειδή το μ είναι σ-πεπερασμένο υπάρχει $B \subseteq \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ τέτοιο ώστε $0 < \mu(B) < +\infty$ και θέτουμε: $f = 1_B \operatorname{sgn}(g) \in L^1(\mu)$. Τώρα: $|\varphi_g(f)| = |\int [redacted] fg\, d\mu| = |\int_B |g|\, d\mu| = \int_B |g|\, d\mu \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\mu(B) = (\|g\|_\infty - \varepsilon)\|f\|_1$ και άρα: $\|g\|_\infty - \varepsilon \leq \|\varphi_g\|$, $\forall \varepsilon > 0$ αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και άρα $\|g\|_\infty \leq$ [redacted] $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty \Rightarrow \|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$ και άρα ο T είναι γραμμική ισομετρία. Τώρα θα αποδείξουμε ότι ο T είναι επί.

<u>1η περίπτωση</u>: $\mu(X) < +\infty$: Έστω $\varphi \in L^1(\mu)^*$ και θέτουμε $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ με $\nu(A) = \varphi(1_A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$ και το ν ορίζει μέτρο το οποίο επαληθεύεται εύκολα. Επίσης: $|\nu(A)| = |\varphi(1_A)| \leq \|\varphi\| \mu(A)$ και άρα: $\nu \ll \mu$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g : X \to \mathbb{K}$ τέτοια ώστε: [redacted] $\nu(A) = \int_A g\, d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$. Η σχέση τώρα: $\varphi(f) = \int fg\, d\mu$ ισχύει για f: απλές του $L^1(\mu)$. Αποδεικνύουμε ότι: $g \in L^\infty(\mu)$: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν ισχύει και τότε έχουμε ότι: [redacted] $M > 0$ ώστε: $\mu(\underbrace{\{x\in X \mid |g(x)| > M\}}_{A}) > 0$ και θέτουμε $f = 1_A \operatorname{sgn}(g)$ και τότε: $\varphi(f) = \int fg\, d\mu = \int_A |g|\, d\mu \geq M\mu(A) = M\|f\|_1$ και άρα: $\|\varphi\| \geq M$ και αφού το $M > 0$ ήταν τυχόν έπεται ότι το φ είναι μη φραγμένο και άρα άτοπο, και άρα πρέπει $g \in L^\infty(\mu)$. Έχουμε τώρα ότι $\varphi_g = \varphi$ για απλές του L^1. Έπεται ότι η φ_g είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Και από συνέχεια έχουμε ότι $\varphi_g = \varphi$ σε όλον τον L^1 αφού οι απλές του L^1 είναι πυκνές του L^1 και άρα: $\varphi_g(f) = \int fg\, d\mu$, $\forall f \in L^1$ και άρα είναι επί.

- <u>$\nu \ll \mu$</u>: αν: ~~$|\nu(A)| \leq C\mu(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$ όπου $C > 0$ και $C < +\infty$~~ $\forall A \in \mathcal{A}$ με: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

<u>Radon-Nikodym</u>, για πεπερασμένα μέτρα: Έστω μ, ν 2 πεπερασμένα μέτρα που μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε: $\nu \ll \mu$. Τότε υπάρχει μοναδική μ-σχ.π μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, +\infty)$ ώστε: $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

• <u>Αρμονική Ανάλυση: Μάθημα 4ο:</u>

<u>Σχόλια:</u> Το πρόσημο ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται ως: $sgn(z) = \frac{z}{|z|}$ [redacted] , $z \neq 0$

Όταν δείχνουμε ότι: ο T είναι επί παίρνουμε $\varphi \in (L^p)^*$ και ψάχνουμε ένα $g \in L^q$ ώστε: $Tg = \varphi$. Υποθέτουμε ότι: $\mu(X) < \infty$ και ορίζουμε $\nu(A) = \varphi(1_A)$ [redacted]. Ορίζουμε απλές συναρτήσεις $0 \leq h_n \uparrow |g|$ (όπου $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ παράγωγος Radon-Nikodym) και $f_n = h_n^{q-1} sgn(g)$ και αυτές είναι απλές όταν $g: X \to \mathbb{R}$ και έτσι η απόδειξη δουλεύει, οπότε δείχνουμε ότι ο T είναι επί και όταν η φ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Για την γενική περίπτωση: $\varphi \in ($[redacted]$L^p)^*$ γράφουμε: $\varphi(f) = Re\varphi(f) + i\, Im\varphi(f)$ και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα για τα $Re\varphi(f)$ και $Im\varphi(f)$ και παίρνουμε $g_1, g_2: X \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε: $\cancel{g = g_1 + i g_2}$ $Re\varphi(f) = \int f g_1 d\mu$ και $Im\varphi(f) = \int f g_2 d\mu$, $\forall f \in L^p$. Τότε η $g = g_1 + i g_2$ δίνει $\varphi(f) = \int f g\, d\mu$ και επίσης έχουμε ότι $g \in L^q$ γιατί $g_1, g_2 \in L^q$ αφού ο L^q είναι γραμμικός χώρος, υπόχωρος του $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. <u>Προσέγγιση συναρτήσεων του L^p από "καλές" συναρτήσεις.</u>

- <u>Πρόταση:</u> $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Τότε οι απλές συναρτήσεις $s: X \to \mathbb{K}$ με $\mu(\{x \in X: s(x) \neq 0\}) < \infty$ είναι πυκνές στον $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\forall p \geq 1$, $p < \infty$.

Έστω X μετρικός χώρος, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ Borel-σ-άλγεβρα του X.

Ένα μέτρο Borel $\mu: \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ λέγεται <u>κανονικό</u> αν:

i. $\mu(K) < \infty$ $\forall K \subseteq X$ συμπαγές

ii. $\mu(B) = \inf\{\mu(V): V: \text{ανοιχτό } B \subseteq V\}$

iii. $\mu(B) = \sup\{\mu(K): K: \text{συμπαγές } K \subseteq B\}$

<u>Ορισμός:</u> Έστω X ένας μετρικός χώρος. Ο X λέγεται <u>τοπικά συμπαγής</u> αν $\forall x \in X$ $\exists r > 0$: $\overline{V(x,r)} = \{y \in X:$ [redacted] $d(y,x) \leq r\}$ να είναι συμπαγές.

- **Πρόταση** Έστω (X,d) ένας τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και μ ένα κανονικό μέτρο Borel. Τότε: $C_c(X) = \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f : \text{συνεχής με συμπαγή φορέα} \}$ είναι πυκνός στον $L^p(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ για $1 \le p < \infty$.
(φορέας $supp(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$)

- **Απόδειξη:** Έστω αρχικά $f \in L^p$. Θέλουμε να βρούμε $\forall \varepsilon > 0$ μια $g_\varepsilon \in C_c(X)$ τέτοια ώστε: $\|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. Απο την πρόταση 1η έχουμε ότι αυτό αρκεί να το αποδείξουμε για απλές στον L^p γιατί τότε γενικά για $f \in L^p$ και $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι αφού οι απλές είναι πυκνές στον L^p έπεται ότι υπάρχει s: απλή τέτοια ώστε: $\|f - s\|_p < \varepsilon/2$ και αφού τώρα: έχουμε το θεώρημα για ~~s: απλή~~ απλές στον L^p έπεται ότι υπάρχει $g \in C_c(X)$ τέτοια ώστε: $\|s - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ και άρα τελικά: $\|f - g\|_p \le \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. Έστω επομένως $f \in L^p$ απλή και έστω $f(X) \setminus \{0\} = \{a_1, \dots, a_k\}$ και $A_j = f^{-1}(\{a_j\})$ και τότε: $f = \sum_{j=1}^{k} a_j 1_{A_j}$ και αφού $f \in L^p$ έπεται ότι: $\mu(A_j) < \infty$. Τώρα παρατηρούμε ότι: αν $f_1, \dots, f_k$ είναι συναρτήσεις $C_c(X)$ τέτοιες ώστε: $\|1_{A_j} - f_j\|_p < \frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{k} |a_j|}$ τότε έχουμε ότι: $\|f - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} a_j f_j}_{\in C_c(X)}\|_p \le \sum_{j=1}^{k} |a_j| \, \|1_{A_j} - f_j\|_p < \varepsilon$ και άρα απ' αυτό έπεται ότι αρκεί να προσεγγίσω την 1_A με συναρτήσεις του $C_c(X)$ για $A \in \mathcal{A}$, με $\mu(A) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Απο την κανονικότητα του μέτρου έχουμε ότι: $\exists\, V_\varepsilon$ ανοιχτό τέτοιο ώστε: $A \subseteq V_\varepsilon$ και $\mu(V_\varepsilon \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης $\exists\, K_\varepsilon$ συμπαγές τέτοιο ώστε: $K_\varepsilon \subseteq A$ και $\underline{\mu(A \setminus K_\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Για κάθε $x \in X$: $\exists\, r_x > 0$ τέτοιο ώστε: $\overline{U(x, r_x)}$ να είναι συμπαγές.
Για κάθε $x \in K_\varepsilon$: $\exists\, \delta_x > 0$ με $\delta_x < r_x$ τέτοιο ώστε: $U(x, \delta_x) \subseteq V_\varepsilon$
Απο συμπάγεια του K_ε έχουμε ότι $\exists\, x_1, \dots, x_n$ τέτοια ώστε: $\bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \delta_{x_i}/2) \supseteq K_\varepsilon$ και έστω $V = \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \delta_{x_i}/2)$ ανοιχτό και: $K_\varepsilon \subseteq V \subseteq \overline{V}$. Τότε έχουμε ότι το $\overline{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U(x_i, \delta_{x_i}/2)}$ είναι συμπαγές και $\overline{V} \subseteq V_\varepsilon$. Ορίζουμε: $f(x) = \frac{d(x, V^c)}{d(x, V^c) + d(x, K_\varepsilon)}$ και έχουμε ότι: $f(x) = 0$ για $x \in V^c$ και $f(x) = 1$ για $x \in K_\varepsilon$ και $0 \le f \le 1$, και η f είναι συνεχής.
Τώρα ο φορέας της $f \subseteq \overline{V}$ = συμπαγές και άρα $f \in C_c(X)$. Επίσης: $1_{K_\varepsilon} \le 1_A \le 1_{V_\varepsilon}$ και $1_{K_\varepsilon} \le f \le 1_{V_\varepsilon}$ και: $\|f - 1_A\|_p \le \mu(V_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$ αφού: $\|\ \|^p \le \|1_{V_\varepsilon} - 1_{K_\varepsilon}\|$ ...